Corrigé

Question I

1) $P(z) = -5i\,z^3 - (10-3i)z^2 + 4z + 4i$

$2i$ est une racine de $P(z)$.

HORNER :

	$-5i$	$-10+3i$	4	$4i$
$2i$		10	-6	$-4i$
	$-5i$	$3i$	-2	0

$P(z) = 0$

$\Leftrightarrow (z-2i)\cdot(-5i\,z^2 + 3i\,z - 2) = 0$

$\Leftrightarrow z = 2i$ ou $-5i\,z^2 + 3i\,z - 2 = 0$

$\Delta = -9 - 40i$

$\delta = a + b\cdot i$ est une racine carrée de Δ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -9 & (1) \\ 2ab = -40 & (2) \\ a^2 + b^2 = \sqrt{1681} = 41 & (3) \end{cases}$$

$(1)+(3)$: $2a^2 = 32$

$\Leftrightarrow a = 4$ ou $a = -4$

$(1)-(3)$: $-2b^2 = -50$

$\Leftrightarrow b = 5$ ou $b = -5$

de (2) : a et b ont des signes opposés.

Les r.c.c. de Δ sont $4-5i$ et $-4+5i$.

Les racines de $-5i\,z^2 + 3i\,z - 2$ sont

$$z_1 = \frac{-3i + 4 - 5i}{-10i} = \frac{(4-8i)i}{-10i^2} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$$

$$z_2 = \frac{-3i - 4 + 5i}{-10i} = \frac{(-4+2i)i}{10} = \frac{-1}{5} - \frac{2}{5}i$$

$$S = \left\{ 2i \;;\; \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i \;;\; \frac{-1}{5} - \frac{2}{5}i \right\}$$

2) a) $Z = \dfrac{(-2\cos 5^\circ)^8}{16 \text{ cis } 10^\circ} - 16i$

$= \dfrac{2^8 \;\text{ cis } 40^\circ}{2^4 \;\text{ cis } 10^\circ} - 16i$

$= 2^4 \text{ cis } 30^\circ - 16i$

$= 16\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) - 16i$

$= 8\sqrt{3} - 8i$

$= 16\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

$= 16 \text{ cis}(-30^\circ)$

$z = r\cdot\text{cis }\varphi$ est une racine 5^e de $16 \text{ cis } 150^\circ$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^5 = 16 \\ 5\varphi = -30^\circ + k\cdot 360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[5]{16} \\ \varphi = -6^\circ + k\cdot 72^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow r = \sqrt[5]{16} \text{ cis}(-6^\circ + k\cdot 72^\circ)$

avec $k \in \{0;1;2;3;4\}$

Les racines 5^{e} sont :

$z_0 = \sqrt[5]{16}\cdot\text{cis}(-6^\circ)$

$z_1 = \sqrt[5]{16}\ \text{cis}(66^\circ)$

$z_2 = \sqrt[5]{16}\ \text{cis}(138^\circ)$

$z_3 = \sqrt[5]{16}\ \text{cis}(210^\circ)$

$z_4 = \sqrt[5]{16}\ \text{cis}(282^\circ)$

b) $z_1 = -2\,\text{cis}(5^\circ) = \text{cis}(180^\circ)\cdot 2\cdot\text{cis}(5^\circ)$

$= 2 \text{ cis}(185^\circ)$

$|z_1| = 2$; un argument de z_1 est 185°.

$\overline{z_2} = 16\cdot\text{cis}(-10^\circ)$

$|\overline{z_2}| = 16$; un argument de $\overline{z_2}$ est -10°.

Question II

1) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -m \\ m & -2 & 1 \\ -2m & -2 & 2 \end{vmatrix}$

$= -12 + 0 + 2m^2 + 4m^2 + 6 - 0$

$= 6m^2 - 6 = 6(m^2-1)$

le système admet une seule solution ssi $m \neq -1$ et $m \neq 1$.

lorsque $m=-1$:

$$\begin{cases} 3X + Z = 0 \\ -X - 2Y + Z = 3 \\ 2X - 2Y + 2Z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3X + Z = 0 \\ -3X - Z = 0 \quad (E2)/(E2)-(E3) \\ 2X - 2Y + 2Z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3X + Z = 0 \\ 2X - 2Y + 2Z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Z = 3X \\ 2X - 2Y + 2Z = 3 \end{cases} \quad (*)$$

Poser : $X = \beta$

$$\begin{cases} X = \beta \\ Y = 4\beta - \frac{3}{2} \\ Z = 3\beta \end{cases}$$

$S' = \left\{ \left(\beta ; 4\beta - \frac{3}{2} ; 3\beta\right) \mid \beta \in \mathbb{R} \right\}$

Int. géom. : $(*)$ est un système d'éq. de 2 plans de l'espace dont l'intersection est la droite passant par $A\left(0; \frac{-3}{2}; 0\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$.

2) $d \equiv \begin{cases} X = -4k + \frac{1}{3} & (1) \\ Y = 2k - 1 & (2) \\ Z = -2k & (3) \end{cases}$ $\qquad \pi \equiv 6X - 3Y + 3Z = -1$

a) Déterminons $d \cap \pi$. Remplaçons (1), (2), (3) dans l'éq. de π :

$6\left(-4k + \frac{1}{3}\right) - 3(2k-1) + 3(-2k) = -1$

$\Leftrightarrow -36k = -6$

$\Leftrightarrow k = \frac{1}{6}$

$$\begin{cases} X = -4 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{-1}{3} \\ Y = 2 \cdot \frac{1}{6} - 1 = \frac{-2}{3} \\ Z = -2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{-1}{3} \end{cases}$$

donc $d \cap \pi = \left\{ I\left(\frac{-1}{3}; \frac{-2}{3}; \frac{-1}{3}\right) \right\}$

b) vecteur directeur de d : $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\2\\-2\end{pmatrix}$

vecteur normal de π : $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\-3\\3\end{pmatrix}$

On voit que $\frac{-3}{2} \cdot \vec{u} = \vec{n}$

donc $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires

donc $d \perp \pi$.

c) $A \in d \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \begin{cases} \frac{1}{3} = -4k + \frac{1}{3} \\ 2 = 2k - 1 \\ 0 = -2k \end{cases}$ impossible

donc $A \notin d$.

Déterminons deux points de la droite d.

Pour $k = 0$, $B\left(\frac{1}{3}; -1; 0\right) \in d$

$k = 1$, $C\left(\frac{-11}{3}; 1; -2\right) \in d$

$\vec{AB}\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}-4\\-1\\-2\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs de π_1.

$M(X;Y;Z) \in \pi_1$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} X - \frac{1}{3} & 0 & -4 \\ Y - 2 & -3 & -1 \\ Z & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 6\left(X - \frac{1}{3}\right) + 0 + 0 - 12Z - 0 - 0 = 0$

$\Leftrightarrow 6X - 12Z = 2$

$\Leftrightarrow 3X - 6Z = 1$ éq. de π_1

Question III

1) $\left(3x^2+\frac{2}{x}\right)^8 = \sum_{k=0}^{8} C_8^k \left(3x^2\right)^{8-k}\left(\frac{2}{x}\right)^k$

$= \sum_{k=0}^{8} C_8^k \, 3^{8-k} \, 2^k \cdot x^{16-3k}$

Or $16-3k = 7 \iff k=3$

Le terme cherché est

$C_8^3 \cdot 3^5 \cdot 2^3 \cdot x^7 = \frac{8!}{3!5!} 3^5 \cdot 2^3 \cdot x^7$

$= \underline{\underline{108864 \cdot x^7}}$

2) a) $\# \Omega = C_{30}^3 = 4060$

$P(A) = \frac{C_{20}^2 \cdot C_{10}^1}{C_{30}^3} = \frac{190 \cdot 10}{4060} = \frac{95}{203}$

$\approx 0,468$

$P(B) = \frac{C_{10}^3 + C_{20}^3}{C_{30}^3} = \frac{120+1140}{4060} = \frac{9}{29}$

$\approx 0,310$

b) $P(E) = \frac{15 \cdot 6 + 4 \cdot 5}{20 \cdot 10} = \frac{11}{20} = 0,55$

c) $P_5 = 1 - \frac{2^5}{3^5} = \frac{211}{243} \approx 0,868$