EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES – Sessions 2024							
CORRIGÉ							
Date :	03.06.24		*Horaire :*	08:15 - 11:15		*Durée :*	180 minutes
Discipline :	MATHE	*Type :*	écrit	*Section(s) :*	CB / CB-4LANG		
					Numéro du candidat :		

Question I (3+3+3)+4+4 = 17 points

1) a) $P(z) = z^3 + az^2 + bz + i + 8$ avec a, b, z complexes.

$-2 + i$ est une racine de P

$\Leftrightarrow P(-2+i) = 0$

$\Leftrightarrow -2 + 11i + a(3-4i) + b(-2+i) + i + 8 = 0$

$\Leftrightarrow (3-4i)a + (-2+i)b = -6 - 12i \qquad (1)$

Le reste de la division de $P(z)$ par $z - 2i$ est $8 - i$

$\Leftrightarrow P(2i) = 8 - i$

$\Leftrightarrow -8i - 4a + 2ib + i + 8 = 8 - i$

$\Leftrightarrow -4a + 2ib = 6i$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}ib - \frac{3}{2}i \qquad (2)$

(2) dans (1) : $(3-4i)(\frac{1}{2}ib - \frac{3}{2}i) + (-2+i)b = -6 - 12i$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}ib - \frac{9}{2}i + 2b - 6 - 2b + ib + 6 + 12i = 0$

$\Leftrightarrow \frac{5}{2}ib = \frac{-15}{2}i$

$\Leftrightarrow b = -3.$

Et donc $a = -3i.$ **[3 points]**

b) $P(z) = z^3 - 3iz^2 - 3z + i + 8$

HORNER :

	1	$-3i$	-3	$8+i$
$-2+i$		$-2+i$	$6+2i$	$-8-i$
	1	$-2-2i$	$3+2i$	0

D'où $P(z) = (z + 2 - i)\left[z^2 + (-2-2i)z + (3+2i)\right]$.

Posons $Q(z) = z^2 + (-2-2i)z + (3+2i)$ et calculons les racines de Q.

$\Delta = (-2-2i)^2 - 4(3+2i) = -12 = (2\sqrt{3}i)^2$;

$z_1 = \frac{2+2i-2\sqrt{3}i}{2} = 1 + (1-\sqrt{3})i$; $\quad z_2 = 1 + (1+\sqrt{3})i.$

$S = \{-2+i \ ; \ 1 + (1-\sqrt{3})i \ ; \ 1 + (1+\sqrt{3})i\}$ **[3 points]**

c) Notons : $z_A = -2 + i$; $z_B = 1 + (1 - \sqrt{3})i$; $z_C = 1 + (1 + \sqrt{3})i$.

$AB = |z_A - z_B| = |-3 + \sqrt{3}i| = \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$,

$AC = |z_A - z_C| = |-3 - \sqrt{3}i| = \sqrt{(-3)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$,

$BC = |z_B - z_C| = |-2\sqrt{3}i| = 2\sqrt{3}$. Donc $AB = AC = BC$ et le triangle est équilatéral.

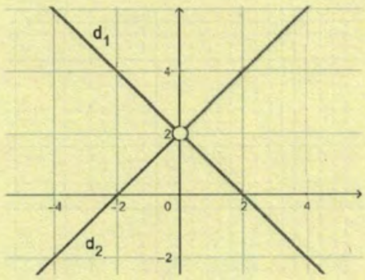
$ABCD\# \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow z_D - z_A = z_C - z_B \Leftrightarrow z_D = z_A + z_C - z_B \Leftrightarrow z_D = -2 + i + 2\sqrt{3}i$

$\Leftrightarrow z_D = -2 + (1 + 2\sqrt{3})i$ affixe du point D **[3 points]**

2) $w = \frac{\bar{z}+2i}{z-2i}$ avec $z \in \mathbb{C}\backslash\{2i\}$.

Posons : $z = x + yi$ avec $x,y \in \mathbb{R}$ et $(x;y) \neq (0;2)$.

$w = \frac{\bar{z}+2i}{z-2i} = \frac{x-yi+2i}{x+yi-2i} = \frac{x+(2-y)i}{x-(2-y)i} \cdot \frac{x+(2-y)i}{x+(2-y)i} = \frac{x^2-(2-y)^2+2x(2-y)i}{x^2+(2-y)^2}$ **[2 points]**



w est un imaginaire pur

$\Leftrightarrow x^2 - (2-y)^2 = 0$ et $(x;y) \neq (0;2)$

$\Leftrightarrow (x - 2 + y)(x + 2 - y) = 0$ et $(x;y) \neq (0;2)$

$\Leftrightarrow (y = -x + 2$ ou $y = x + 2)$ et $(x;y) \neq (0;2)$

Ainsi $\mathrm{E} = (d_1 \cup d_2)\backslash\{I(0;2)\}$ où d_1 est la droite d'équation $y = -x + 2$ et d_2 est la droite d'équation $y = x + 2$.

[2 points]

3) Soit r la rotation de centre O et d'angle α ;

$P'(-4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i)$ est l'image de $P(2 + 6i)$ par la rotation r appliquée trois fois consécutivement

$\Leftrightarrow (2 + 6i) \cdot [cis(\alpha)]^3 = -4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$

$\Leftrightarrow cis(3\alpha) = \frac{-4\sqrt{2}-2\sqrt{2}i}{2+6i}$

$\Leftrightarrow cis(3\alpha) = \frac{-2\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{1+3i} \cdot \frac{1-3i}{1-3i}$

$\Leftrightarrow cis(3\alpha) = \frac{-2\sqrt{2}-\sqrt{2}i+6\sqrt{2}i-3\sqrt{2}}{10}$

$\Leftrightarrow cis(3\alpha) = \frac{-5\sqrt{2}+5\sqrt{2}i}{10}$

$\Leftrightarrow cis(3\alpha) = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$\Leftrightarrow cis(3\alpha) = cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow 3\alpha = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Les rotations cherchées sont donc : $r_{\left(O;\, \frac{\pi}{4}\right)}$, la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$;

$r_{\left(O;\, \frac{11\pi}{12}\right)}$, la rotation de centre O et d'angle $\frac{11\pi}{12}$;

$r_{\left(O;\, \frac{19\pi}{12}\right)}$, la rotation de centre O et d'angle $\frac{19\pi}{12}$. **[4 points]**

Question II **3+3+2+(4+2+3) = 17 points**

1) On a : $\left(2x - \frac{1}{8x^2}\right)^{11} = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^{k} \cdot (2x)^{11-k} \cdot \left(\frac{-1}{8x^2}\right)^{k} = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^{k} \cdot 2^{11-k} \cdot \left(\frac{-1}{8}\right)^{k} \cdot x^{11-k} \cdot x^{-2k}$

Déterminons k :

$11 - k - 2k = 5$

$\Leftrightarrow -3k = -6$

$\Leftrightarrow k = 2$

Calculons le terme en x^5 : $C_{11}^{2} \cdot 2^9 \cdot \left(\frac{-1}{8}\right)^2 \cdot x^9 \cdot x^{-4} = \frac{11!}{9! \cdot 2!} \cdot 2^9 \cdot 2^{-6} \cdot x^5 = 55 \cdot 8 \cdot x^5 = 440 \cdot x^5$

Ainsi le terme cherché est $440 \cdot x^5$. **[3 points]**

2) Il y a $\#\Omega = C_{32}^{7} = \frac{32!}{25! \cdot 7!} = 3365856$ mains de 7 cartes.

$\#A = C_4^1 \cdot C_{28}^6 = 4 \cdot \frac{28!}{22! \cdot 6!} = 1506960$ mains de 7 cartes comportant exactement 1 as.

$P(A) = \frac{C_4^1 \cdot C_{28}^6}{C_{32}^7} = \frac{4 \cdot \frac{28!}{22! \cdot 6!}}{\frac{32!}{25! \cdot 7!}} = \frac{805}{1798} \approx 44{,}77\%$ **[1 point]**

Déterminons le nombre de mains de 2 as et 3 piques, dont l'as de pique :

$\#B1 = C_3^1 \cdot C_7^2 \cdot C_{21}^3 = 3 \cdot \frac{7!}{5! \cdot 2!} \cdot \frac{21!}{18! \cdot 3!} = 3 \cdot 21 \cdot 1330 = 83790$

Déterminons le nombre de mains de 2 as et 3 piques, sans l'as de pique :

$\#B2 = C_3^2 \cdot C_7^3 \cdot C_{21}^2 = 3 \cdot \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot \frac{21!}{19! \cdot 2!} = 3 \cdot 35 \cdot 210 = 22050$

$P(B) = \frac{83790 + 22050}{3365856} = \frac{735}{23374} \approx 3{,}14\%$ **[2 points]**

3) Parmi les 12 cartes, il y 6 cartes rouges et 6 cartes noires. Il y a $C_{12}^{6} = \frac{12!}{6!\cdot 6!} = 924$ possibilités pour former un paquet de 6 cartes, les cartes restantes forment le deuxième paquet de 6 cartes.

Il y a $C_6^3 \cdot C_6^3 = 20 \cdot 20 = 400$ mains de 3 cartes rouges et 3 cartes noires.

La probabilité demandée est $\frac{400}{924} = \frac{100}{231} \approx 43{,}29\%$. **[2 points]**

Alternative : On peut aussi raisonner autrement et obtenir $\frac{200}{462} =$ ...

4) a) Puisque le jeton tiré n'est pas remis dans l'urne, $\#\Omega = 5 \cdot 4 = 20$.

	1	2	3	4	5
1		3	4	5	6
2	3		5	6	7
3	4	5		7	8
4	5	6	7		9
5	6	7	8	9	

$P(\text{S est paire}) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$; $P(\text{S premier}) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ et $P(S = 9) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

Loi de probabilité de X :

$P(X = 18) = \frac{2}{5}$

$P(X = -16) = \frac{1}{2}$

$P(X = -12) = \frac{1}{10}$ **[4 points]**

b) Espérance mathématique de X : $E(X) = \frac{2}{5} \cdot 18 + \frac{1}{2} \cdot (-16) + \frac{1}{10} \cdot (-12) = -2 < 0$ donc le jeu n'est pas équilibré, le jeu est défavorable au joueur.

Écart-type de X :

$\sigma(X) = \sqrt{\frac{2}{5} \cdot [18 - (-2)]^2 + \frac{1}{2} \cdot [-16 - (-2)]^2 + \frac{1}{10} \cdot [-12 - (-2)]^2} = 2\sqrt{67} \approx 16{,}37.$

[2 points]

c) La loi de probabilité de Y est une loi binomiale. En effet : Un jeu correspond à une épreuve de Bernoulli. Si le joueur gagne 18€, c'est un succès et la probabilité d'un succès est $p = \frac{2}{5}$. Sinon c'est un échec. Ainsi la probabilité d'un échec est $q = \frac{3}{5}$. Puisque le joueur répète n fois le même jeu sous les mêmes conditions, il s'agit d'un schéma de Bernoulli où Y est égal au nombre de succès.

Valeurs possibles pour Y: $0;1;2;...;n$.

Pour tout $k \in \{0;1;2;...;n\}$, $P(Y = k) = C_n^k \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{n-k}$. **[1 point]**

Déterminons le plus petit entier naturel n tel que

$P(Y \geq 1) \geq 95\%$

$\Leftrightarrow 1 - P(Y = 0) \geq 0{,}95$

$\Leftrightarrow P(Y = 0) \leq 0{,}05$

$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^n \leq 0{,}05$

$\Leftrightarrow n \cdot \ln\left(\frac{3}{5}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{20}\right)$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{20}\right)}{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}$.

Or $\frac{\ln\left(\frac{1}{20}\right)}{\ln\left(\frac{3}{5}\right)} \approx 5{,}86$ et donc le joueur doit jouer au moins 6 fois le jeu pour que la probabilité de gagner au moins une fois 18€ soit supérieure ou égale à 95%. **[2 points]**

Question III **8+6 = 14 points**

1) On a : $4x^2 - 5y^2 + 8x + 20y - 36 = 0$

$\Leftrightarrow 4(x^2 + 2x + 1) - 5\left(y^2 - 4y + 4\right) = 36 + 4 - 20$

$\Leftrightarrow 4(x + 1)^2 - 5(y - 2)^2 = 20$

$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{5} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

Équation réduite d'une hyperbole de centre $\Omega(-1;2)$ d'axe focal d'équation $y = 2$ avec $a = \sqrt{5}$ et $b = 2$.

[2 points]

Or $c^2 = a^2 + b^2 = 9$, donc $c = 3$. D'où $e = \frac{c}{a} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

$\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y + 2 \end{cases}$

Dans $\left(\Omega;\vec{i};\vec{j}\right)$:

Sommets : $S_1(\sqrt{5};0)$, $S_2(-\sqrt{5};0)$

Foyers : $F(3;0)$, $F'(-3;0)$

Directrices : $d_F \equiv X = \frac{5}{3}$, $d_{F'} \equiv X = -\frac{5}{3}$

Asymptotes : $a_1 \equiv Y = \frac{2\sqrt{5}}{5}X$, $a_2 \equiv Y = -\frac{2\sqrt{5}}{5}X$

Dans $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$:

Sommets : $S_1(\sqrt{5} - 1;2)$, $S_2(-\sqrt{5} - 1;2)$

Foyers : $F(2;2)$, $F'(-4;2)$

Directrices : $d_F \equiv x = \frac{2}{3}$, $d_{F'} \equiv x = -\frac{8}{3}$

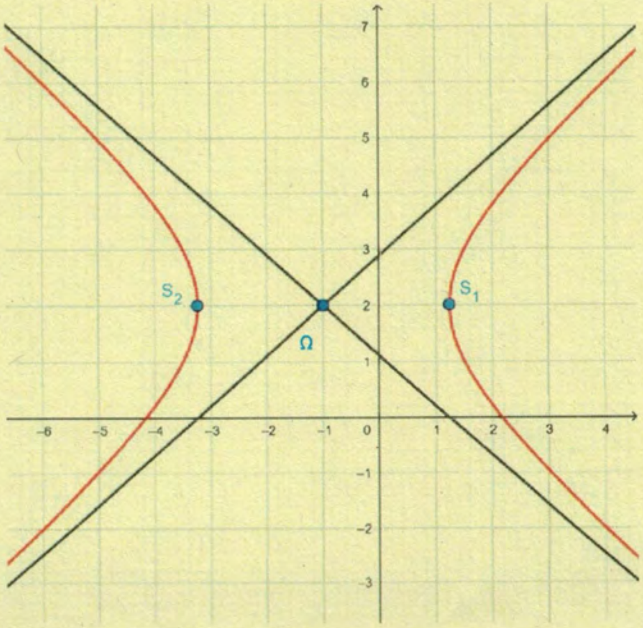
Asymptotes : $a_1 \equiv y - 2 = \frac{2\sqrt{5}}{5}(x + 1)$,

$a_2 \equiv y - 2 = -\frac{2\sqrt{5}}{5}(x + 1)$ **[4 points]**

$\frac{(x+1)^2}{5} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

$\Leftrightarrow y = 2 \pm \sqrt{\frac{4}{5}(x+1)^2 - 4}$

x	2	3	4
$y = 2 + \sqrt{\frac{4}{5}(x+1)^2 - 4}$	3,79	4,97	6



[2 points]

2) La conique Γ est une ellipse car $e < 1$.

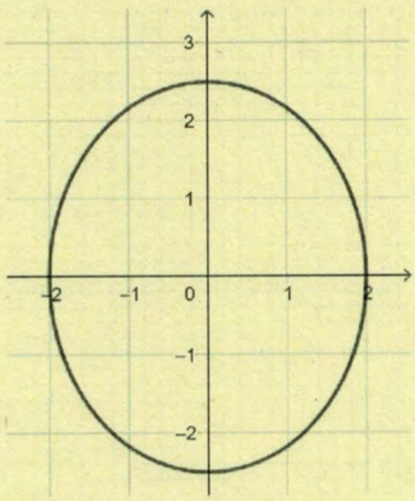
Le centre étant l'origine, elle admet une équation réduite de la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

La tangente t à Γ au point $T(x_0;y_0) \in \Gamma$ où $y_0 = 2$ admet comme équation $\frac{x_0 \cdot x}{a^2} + \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1$, c'est-à-dire $\frac{x_0 \cdot x}{a^2} + \frac{2 \cdot y}{b^2} = 1$. Or $K\left(0; \frac{25}{8}\right) \in t \Leftrightarrow b^2 = 2 \cdot \frac{25}{8}$. Ainsi $b = \frac{5}{2}$.

L'axe focal étant (Oy), on a $e = \frac{c}{b} = \frac{3}{5}$ et donc $c = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$.

Et puisque $c^2 = b^2 - a^2$, on a $a^2 = b^2 - c^2 = \frac{25}{4} - \frac{9}{4} = 4$. Donc $a = 2$.

Ainsi Γ admet comme équation $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1$.



$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1$

$\Leftrightarrow y = \pm \frac{5}{4} \cdot \sqrt{4 - x^2}$

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{2}$
$y = \frac{5}{4} \cdot \sqrt{4 - x^2}$	2,42	2	1,65

[6 points]

Question IV **12 points**

La droite d non parallèle à l'axe des ordonnées admet une pente $m \in \mathbb{R}$; m est le paramètre.

La droite d de pente m et passant par $A(1;3)$ admet comme équation $y = m(x-1)+3$ (1).

Le point d'intersection B de d et de l'axe des ordonnées a comme coordonnées $B(0;-m+3)$.

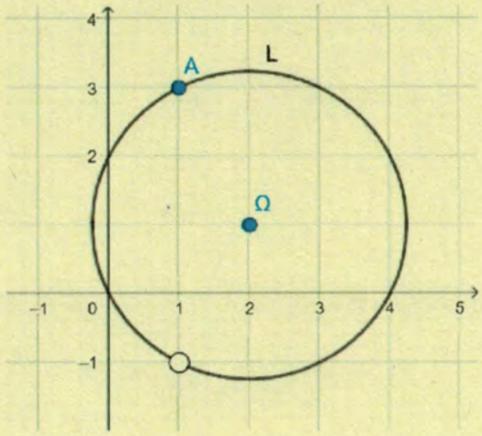
Le point C étant le symétrique de B par rapport à la 1re bissectrice b du repère, on a $C(-m+3;0)$.

Le vecteur $\vec{n}\binom{m}{-1}$ est un vecteur normal de la droite d et donc c'est un vecteur directeur de la droite g.

On a : $M(x,y) \in g \Leftrightarrow \text{dét}(\overrightarrow{CM};\vec{n}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+m-3 & m \\ y & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + my + m - 3 = 0$.

Ainsi la droite g admet comme équation $x + my = 3 - m$ (2).

Les coordonnées du point d'intersection M des droites d et g vérifient les équations (1) et (2). Pour déterminer une équation cartésienne du lieu L du point d'intersection M des droites d et g, éliminons le paramètre m.



<u>Lorsque $x \neq 1$:</u>

De (1) : $m = \frac{y-3}{x-1}$

Dans (2) : $x + \frac{y-3}{x-1}y = 3 - \frac{y-3}{x-1}$ $\quad | \cdot (x-1)$

$\Leftrightarrow x(x-1) + y(y-3) = 3(x-1) - (y-3)$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 - 2y = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 5$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$

C'est une équation cartésienne du cercle Γ de centre $\Omega(2;1)$ et de rayon $r = \sqrt{5}$ privé des deux points du cercle d'abscisses 1 à savoir $A(1;3)$ et $A'(1;-1)$.

<u>Lorsque $x = 1$:</u>

De (1) : $y = 3$. De (2) : $m = \frac{1}{2}$. Le point d'intersection de d et g est le point $A(1;3)$ qui appartient aussi au cercle Γ.

La droite d étant non parallèle à l'axe des ordonnées, il n'existe pas de droite d passant par $A'(1;-1)$. Donc ce point n'est pas un point d'intersection des droites d et g et n'appartient donc pas au lieu cherché.

Ainsi, le lieu L cherché est le cercle de centre $\Omega(2;1)$ et passant par A privé du point $A'(1;-1)$.

[12 points]