EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES – Sessions 2024							
QUESTIONNAIRE							
Date :	03.06.24		*Horaire :*	08:15 - 11:15		*Durée :*	180 minutes
Discipline :	MATHE	*Type :*	écrit	*Section(s) :*	CB / CB-4LANG		
					Numéro du candidat :		

Question I (3+3+3)+4+4 = 17 points

1) Soit $P(z) = z^3 + az^2 + bz + i + 8$ où a, b, z sont des nombres complexes.

   a) Déterminez a et b sachant que $-2 + i$ est une racine de P et que le reste de la division de $P(z)$ par $z - 2i$ est $8 - i$.

   b) Résolvez l'équation $P(z) = 0$ sachant que $a = -3i$ et $b = -3$ et $-2 + i$ est une racine de P.

   c) Dans le plan de Gauss, on considère les points A, B et C dont les affixes sont les solutions trouvées sous b), plus précisément : l'affixe de A est $-2 + i$, l'affixe de B est la solution dont la partie imaginaire est négative et l'affixe de C est la solution restante. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifiez ! Déterminez l'affixe du point D sachant que $ABCD$ est un parallélogramme.

2) Soit le nombre complexe $w = \frac{\bar{z}+2i}{z-2i}$, avec $z \in \mathbb{C}\setminus\{2i\}$.

   Déterminez et construisez dans le plan de Gauss l'ensemble $\mathrm{E} = \{M(z) | w \in i\mathbb{R}\}$ (unité : 1 cm).

3) Déterminez les rotations r de centre O et d'angle α qui, appliquées trois fois consécutivement au point P d'affixe $2 + 6i$, donnent P' d'affixe $-4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$ comme image.

Question II 3+3+2+(4+2+3) = 17 points

1) Déterminez le terme en x^5, avec $x \in \mathbb{R}^*$, dans le développement de $\left(2x - \frac{1}{8x^2}\right)^{11}$.

2) D'un jeu de 32 cartes on tire au hasard et simultanément 7 cartes. Calculez la probabilité des événements suivants :

   A : « parmi les cartes tirées il y a exactement 1 as » ;

   B : « parmi les cartes tirées il y a exactement 2 as et exactement 3 piques ».

3) Les 12 cartes formées des 4 valets, 4 dames et 4 rois sont bien mélangées et divisées au hasard en deux paquets de 6 cartes. Calculez la probabilité que chaque paquet contient 3 cartes rouges et 3 cartes noires.

4) Un jeu consiste à tirer successivement et sans remise deux jetons d'une urne contenant 5 jetons numérotés de 1 à 5. On note S la somme des deux numéros sortis. Si la somme S est paire, le joueur gagne 18€ ; si la somme S est un nombre premier, il perd 16€ ; si la somme vaut 9, il perd 12€. Soit X le gain (positif ou négatif) du joueur.

a) Déterminez la loi de probabilité de X .

b) Calculez l'espérance mathématique et l'écart-type de X. Le jeu est-il équilibré, favorable ou défavorable au joueur ?

c) Un joueur joue n fois de suite au jeu précédent (les jetons sont remis dans l'urne après chaque jeu), et on note Y le nombre de fois qu'il gagne 18€. Déterminez la loi de probabilité de Y et calculez combien de parties il doit au moins jouer, pour que la probabilité de gagner au moins une fois 18€ soit supérieure ou égale à 95%.

Question III **8+6 = 14 points**

1) Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan, on considère la conique C d'équation :

$$4x^2 - 5y^2 + 8x + 20y - 36 = 0 .$$

Déterminez son équation réduite, sa nature, son centre, son axe focal, ses sommets, ses foyers, son excentricité et ses asymptotes éventuelles dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Représentez graphiquement C dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. (unité : 1 cm)

2) Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère orthonormé du plan.

Soit Γ une conique de centre $O(0;0)$, d'axe focal (Oy) et d'excentricité $\frac{3}{5}$. La droite t passant par le point $K\left(0;\frac{25}{8}\right)$ est tangente à Γ en un point T d'ordonnée 2.

Déterminez une équation cartésienne de Γ.

Représentez graphiquement Γ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. (unité : 1 cm)

Question IV **12 points**

Dans un repère orthonormé du plan, on considère une droite variable d non parallèle à l'axe des ordonnées et passant par le point $A(1;3)$. La droite d coupe l'axe des ordonnées en un point B. Soit h la droite passant par B et orthogonale à la droite b d'équation $y = x$. La droite h coupe l'axe des abscisses au point C. Soit g la droite passant par C et perpendiculaire à la droite d. Déterminez et représentez le lieu L du point d'intersection M des droites d et g. (unité : 1cm)

Examen de fin d'études secondaires

Sections B, C, D

Formules trigonométriques

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$		
$\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$	$\sin^2 x = \dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$	$1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\cos(-x) = \cos x$
$\tan(\pi - x) = -\tan x$	$\tan(\pi + x) = \tan x$	$\tan(-x) = -\tan x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$	
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$	
$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$	
$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$		$\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$		
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$		$\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$
$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$		
$\sin 2x = 2\sin x \cos x$	$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$	
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$	
$\sin 2x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$	$\cos 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$	$\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$
$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$	$\cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$	
$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$		$\tan p + \tan q = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$
$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$		
$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$		$\tan p - \tan q = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$
$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$		
$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$		
$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$		
$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$		