

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES					
Sessions 2023 – QUESTIONNAIRE ÉCRIT					
Date :	20.09.23	Durée :	08:15 - 11:15	Numéro candidat :	
Discipline :	Mathématiques		Section(s) :	CB / CB-4LANG	

Question I (10+4 = 14 points)

- Soit $P(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + 7 - 9i$ avec α et β complexes.
 - Déterminer α et β sachant que $-1 + i$ est une racine de P et que le reste de la division de $P(z)$ par $z + 2$ est $-17 - 19i$.
 - Résoudre ensuite l'équation $P(z) = 0$ en remplaçant α et β par les valeurs trouvées dans a).
 - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé soient les points A, B et C dont les affixes sont les solutions de l'équation $P(z) = 0$. Déterminer la nature du triangle ABC . Justifier la réponse.
- Soient λ et α des nombres réels. Dans le plan de Gauss, on donne les points $A(-\sqrt{3} - i)$ et $B(4\sqrt{2})$. Soit h une homothétie de centre O et de rapport λ et r une rotation de centre O et d'angle α . Déterminer toutes les possibilités pour λ et α telles que $(h \circ r)(A) = B$.

Question II (3+2+4+7 = 16 points)

- Calculer le terme en $\frac{1}{x^4}$ provenant du développement de $\left(\sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}x^2}\right)^{11}$.
- Pierre possède 4 livres de mathématiques différents et 5 livres de physique différents. Il les range au hasard en ligne sur une étagère de sa bibliothèque.
Calculer la probabilité que les livres de mathématiques soient groupés ensemble.
- De combien de manières peut-on choisir un groupe de 8 élèves parmi les 20 élèves d'une classe pour fêter les résultats d'un examen si :
 - Carole, Nadine et Martine n'acceptent de participer que si elles sont ensemble ?
 - Marc refuse de participer si Claude ou Tom participent ?
- Un jeu consiste à gratter exactement 2 cases sur des billets de loterie ayant chacun 9 cases. Sur chaque billet il y a exactement k cases ($2 \leq k \leq 7$) derrière lesquelles se cache l'image d'un cœur. Si le joueur gratte 2 cœurs, il gagne 10 €. Si le joueur gratte exactement 1 cœur, il gagne 2 €. Si le joueur ne gratte aucun cœur, il perd 10 €. Soit X la variable aléatoire qui représente le gain du joueur.
 - Déterminer la loi de probabilité de X .
 - Déterminer k pour que le jeu soit équilibré.

Question III (5+5+5 = 15 points)

- 1) Identifier la courbe $C : y = -2 - \frac{1}{2}\sqrt{3-x}$ et tracer-la dans un repère orthonormé du plan (unité : 1 cm).
- 2) Soit la conique Γ d'équation $45x^2 - 5y^2 + 18 = 0$ dans un repère orthonormé. Déterminer une équation des tangentes à Γ perpendiculaires à la droite d d'équation $x - 2y + 2 = 0$. Déterminer les coordonnées des points de tangence.
- 3) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 - a) Déterminer la nature et l'équation réduite d'une conique Γ de centre O passant par les points $A\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -1\right)$ et $B\left(-\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right)$ et dont l'excentricité est strictement comprise entre 0 et 1.
 - b) Déterminer les coordonnées des foyers de Γ et l'excentricité de Γ .

Question IV (15 points)

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan d'unité graphique 1 cm, on considère les points $A(2,0)$ et $B(0,3)$. Soit d une droite variable perpendiculaire à la droite (AB) . Cette droite d coupe (OB) en C et (OA) en D . Déterminer et construire le lieu L du point d'intersection de (AC) et de (BD) .

Formules trigonométriques

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$	$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\tan(\pi - x) = -\tan x$	
$\sin(\pi + x) = -\sin x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\tan(\pi + x) = \tan x$	
$\sin(-x) = -\sin x$	$\cos(-x) = \cos x$	$\tan(-x) = -\tan x$	
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$	
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$	
$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$	$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$	$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$	$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
		$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$	$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$	
$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$	$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$	$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$	$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$
$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$			$\cos 3x = -3 \cos x + 4 \cos^3 x$
$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$	$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$	$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$	$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$
		$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$	$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$
$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$	$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$	$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$	