EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES			
Sessions 2023 – CORRIGÉ-BARÈME ÉCRIT			
Date :	19.05.23	*Durée :*	08:15 - 11:15
Discipline :	Mathématiques	*Section(s) :*	CB / CB-4LANG

Question 1 (6+8+3 = 17pts)

A. $p(1-i) = 2-5i$

$\Leftrightarrow 4(1-i)^2 + 2m(1-i) - m - 9 = 2-5i$

$\Leftrightarrow -8i + 2m - 2im - m = 11 - 5i$

$\Leftrightarrow m(1-2i) = 11+3i$

$\Leftrightarrow m = \frac{11+3i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i}$

$\Leftrightarrow m = \frac{11+22i+3i-6}{1+4}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{m = 1+5i}$ [2]

Ainsi $p(z) = 4z^2 + 2(1+5i)z - 10 - 5i$ et on a :

$p(z) = 0$

$\Leftrightarrow 4z^2 + 2(1+5i)z - 10 - 5i = 0$

$$\begin{aligned}\Delta &= 4(1+5i)^2 - 16(-10-5i)\\ &= 4(1+10i-25) + 160 + 80i\\ &= \boldsymbol{64+120i}\end{aligned}$$ [1]

Si $a, b \in \mathbb{R}$, on a : $(a+bi)^2 = 64+120i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 64 & (1)\\ 2ab = 120 & (2)\\ a^2+b^2 = \sqrt{64^2+120^2} = 136 & (3)\end{cases}$

$(1)+(3)$: $2a^2 = 200 \Leftrightarrow a = \pm 10$

$(3)-(1)$: $2b^2 = 72 \Leftrightarrow b = \pm 6$

Par (2), les racines carrées complexes de Δ sont $10+6i$ et $-10-6i$. [2]

Finalement les racines de p sont : $\boldsymbol{z_1} = \frac{-2(1+5i)+10+6i}{8} = \boldsymbol{1 - \frac{1}{2}i}$ et

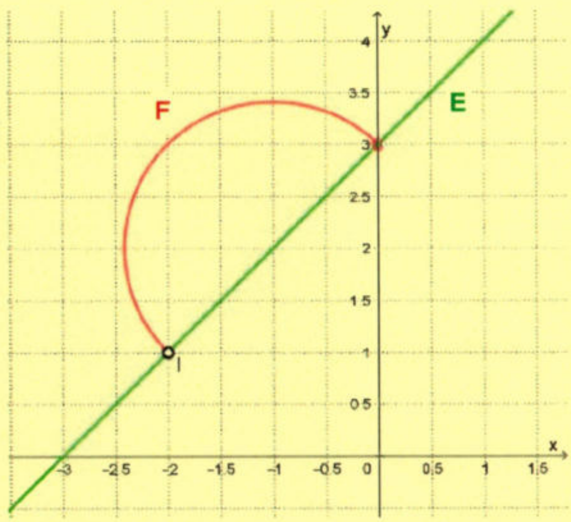
$\boldsymbol{z_2} = \frac{-2(1+5i)-10-6i}{8} = \boldsymbol{-\frac{3}{2} - 2i}$ [1]

B. Posons $z = x+iy$, où $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}Z &= \frac{2i(x+iy)+6}{x+iy+2-i}\\ &= \frac{(6-2y)+2ix}{(x+2)+i(y-1)} \cdot \frac{(x+2)-i(y-1)}{(x+2)-i(y-1)}\\ &= \frac{6x+12-2xy-4y-i(6y-6-2y^2+2y)+i(2x^2+4x)+2xy-2x}{(x+2)^2+(y-1)^2}\\ &= \boldsymbol{\frac{(4x-4y+12)+2i(x^2+y^2+2x-4y+3)}{(x+2)^2+(y-1)^2}}\end{aligned}$$ [2]

- $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow 4x - 4y + 12 = 0 \;\; et \;\; (x;y) \neq (-2;1)$
  $\Leftrightarrow \underbrace{y = x + 3}_{\equiv d} \;\; et \;\; (x;y) \neq (-2;1)$
  Comme $(-2;1) \in d$, E est la droite $d \equiv y = x + 3$ privée du point $I(-2+i)$. [2]

- $\arg(z) = \pi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0 \\ 4x - 4y + 12 < 0 \end{cases} \;\; et \;\; (x;y) \neq (-2;1)$
  $\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 2 \\ y > x + 3 \end{cases} \;\; et \;\; (x;y) \neq (-2;1)$ [3]
  F est la partie du cercle $C_{(-1+2i),\sqrt{2}}$ contenue dans le demi-plan d'inéquation $y > x + 3$.



[1]

C. On a : $\frac{z_B}{z_A} = \frac{48+64i}{-48+36i} = \frac{12+16i}{-12+9i} \cdot \frac{-12-9i}{-12-9i}$
$= \frac{-144-108i-192i+144}{144+81}$
$= \frac{-300i}{225}$
$= -\frac{4}{3}i$
$= \frac{4}{3} cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)$
$= -\frac{4}{3} cis\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Ainsi $z_B = \frac{4}{3} cis\left(-\frac{\pi}{2}\right) z_A$ et B est l'image de A par $h_{O;\frac{4}{3}} \circ r_{O;-\frac{\pi}{2}}$.

D'autre part, $z_B = -\frac{4}{3} cis\left(\frac{\pi}{2}\right) z_A$ et B est l'image de A par $h_{O;-\frac{4}{3}} \circ r_{O;\frac{\pi}{2}}$. [3]

Question 2 ((5+2)+4)+(1+2+3) = 17pts)

A. 1) a) $p(X=9)=\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{2}{6}\right)^2+\left(\frac{3}{6}\right)^2=\frac{14}{36}=\frac{7}{18}$

$p(X=3)=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot 2=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

$p(X=-7)=1-\left(\frac{7}{18}+\frac{5}{18}\right)=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$

x_i	-7	3	9
$f(x_i)=p(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{7}{18}$

[3]

- $E(X)=9\cdot\frac{7}{18}+3\cdot\frac{5}{18}-7\cdot\frac{1}{3}=2\text{ €}$
  Comme $E(X)>0$, le jeu est favorable au joueur. [1]
- $\sigma(X)=\sqrt{\frac{7}{18}\cdot(9-2)^2+\frac{5}{18}\cdot(3-2)^2+\frac{1}{3}\cdot(-7-2)^2}=\frac{\sqrt{417}}{3}\approx 6{,}8\text{ €}$ [1]

b) Soit a la nouvelle perte. On a :

$$E(X)=0\Leftrightarrow 9\cdot\frac{7}{18}+3\cdot\frac{5}{18}-a\cdot\frac{1}{3}=0$$
$$\Leftrightarrow\frac{13}{3}-\frac{a}{3}=0$$
$$\Leftrightarrow a=13$$

Il faut remplacer les 7€ par une perte de 13€ pour rendre ce jeu équilibré. [2]

2) Y suit une loi binomiale, car :

- Une partie est une épreuve de Bernoulli : $\begin{cases}\textit{succès : gagner } 9\text{€}, & p=\frac{7}{18}\\ \textit{échec : ne pas gagner } 9\text{€}, & q=1-p=\frac{11}{18}\end{cases}$
- Comme les n parties sont indépendantes, on a un schéma de Bernoulli.
- Y compte le nombre de succès.

Ainsi : $p(Y=i)=C_n^i\left(\frac{7}{18}\right)^i\left(\frac{11}{18}\right)^{n-i}, \forall i\in\{0;1;2;\dots;n\}$ [2]

$$p(Y>0)>90\%\Leftrightarrow 1-p(Y=0)>0{,}9$$
$$\Leftrightarrow 1-\left(\frac{11}{18}\right)^n>0{,}9$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{11}{18}\right)^n<0{,}1\qquad |\log_{\frac{11}{18}}()\ \textit{bijection strictement décroissante}$$
$$\Leftrightarrow n>\log_{\frac{11}{18}}(0{,}1)\approx 4{,}7$$

Donc il doit jouer au moins 5 parties pour que la probabilité de gagner au moins une fois 9€ soit supérieure à 90%.

B. Comme on forme des nombres, l'ordre des chiffres est important et ils peuvent se répéter.

1) $B_3^6 = 3^6 = \mathbf{729}$ **possibilités.** [1]

2) La séquence « 123 » peut être placée à 4 positions différentes et il reste alors 3 chiffres à placer. Comme il ne faut pas compter « 123123 » deux fois, on a :

$$4 \cdot B_3^3 - 1 = 4 \cdot 3^3 - 1 = 108 - 1 = \mathbf{107} \text{ possibilités.}$$

[2]

3) On soustrait du nombre total de possibilités les nombres qui ne contiennent qu'au maximum 2 chiffres (à choisir parmi 3), sans compter deux fois les nombres à un seul chiffre :

$$B_3^6 - (C_3^2 \cdot B_2^6 - C_3^1) = 729 - 3 \cdot 64 + 3 = \mathbf{540} \text{ possibilités.}$$

Alternative :
On soustrait du nombre total de possibilités les nombres qui ne contiennent qu'exactement 2 chiffres (à choisir parmi 3) et ceux qui ne contiennent qu'exactement un chiffre :

$$B_3^6 - C_3^2 \cdot (B_2^6 - 2) - C_3^1 = 729 - 3 \cdot 62 - 3 = \mathbf{540} \text{ possibilités.}$$

[3]

Question 3 (8+6 = 14pts)

A. $\Gamma \equiv 8x^2 - 12y^2 + 80x + 36y + 221 = 0$

$\Leftrightarrow 8(x^2 + 10x + 25) - 12\left(y^2 - 3y + \frac{9}{4}\right) = -221 + 8 \cdot 25 - 12 \cdot \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow 8(x+5)^2 - 12\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = -48 \quad | : (-48)$

$\Leftrightarrow \frac{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}{4} - \frac{(x+5)^2}{6} = 1 \equiv \Gamma$ [2]

Ainsi Γ est la translatée de l'hyperbole $\Gamma' \equiv \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{6} = 1$ d'axe (Oy) par le vecteur $\begin{pmatrix} -5 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

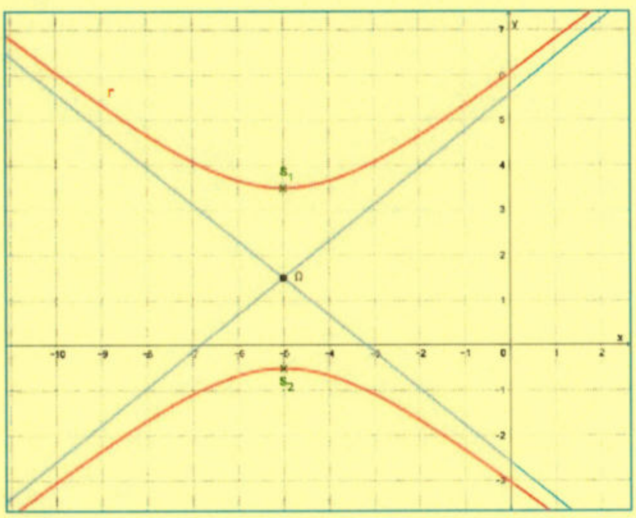
On a : $a = \sqrt{6},\ b = 2,\ c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10},\ e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{10}}{2} > 1$.

	$\Gamma' \equiv \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{6} = 1$	$\Gamma \equiv \frac{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}{4} - \frac{(x+5)^2}{6} = 1$
Centre	$O(0;0)$	$\Omega\left(-5;\frac{3}{2}\right)$
Axe focal	$(Oy) \equiv x = 0$	$m \equiv x = -5$
Foyers	$F_1'(0;\sqrt{10}), F_2'(0;-\sqrt{10})$	$F_1\left(-5;\sqrt{10}+\frac{3}{2}\right), F_2'\left(-5;-\sqrt{10}+\frac{3}{2}\right)$
Sommets	$S_1'(0;2), S_2'(0;-2)$	$S_1\left(-5;\frac{7}{2}\right), S_2\left(-5;-\frac{1}{2}\right)$
Asymptotes	$A_1' \equiv y = \frac{2}{\sqrt{6}}x \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{6}}{3}x$ $A_2' \equiv y = -\frac{2}{\sqrt{6}}x \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{6}}{3}x$	$A_1 \equiv y - \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}(x+5)$ $A_2 \equiv y - \frac{3}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{3}(x+5)$

$\frac{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}{4} - \frac{(x+5)^2}{6} = 1$

$\Leftrightarrow y = \frac{3}{2} \pm \sqrt{4 + \frac{2}{3}(x+5)^2}$

x	-5	-3	0
$y = \frac{3}{2} + \sqrt{4 + \frac{2}{3}(x+5)^2}$	3,5	4,08	6,05



[6]

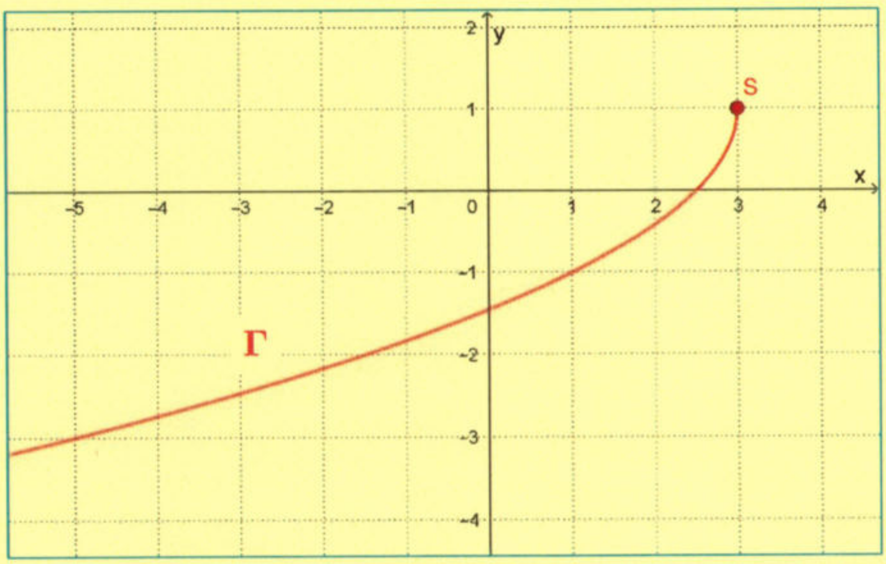
B. $\Gamma \equiv y = 1 - \sqrt{6-2x}$ C.E. : $6 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$

$$\forall x \in]-\infty;3] : y = 1 - \sqrt{6-2x}$$
$$\Leftrightarrow y - 1 = \underbrace{-\sqrt{6-2x}}_{\leq 0}$$
$$\Leftrightarrow (y-1)^2 = 6 - 2x \quad et \quad y - 1 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{(y-1)^2 = -2(x-3)}_{\equiv \mathbb{P}} \quad et \quad y \leq 1$$

Donc Γ est la partie de la parabole $\mathbb{P}$ contenue dans le demi-plan d'inéquation $y \leq 1$.

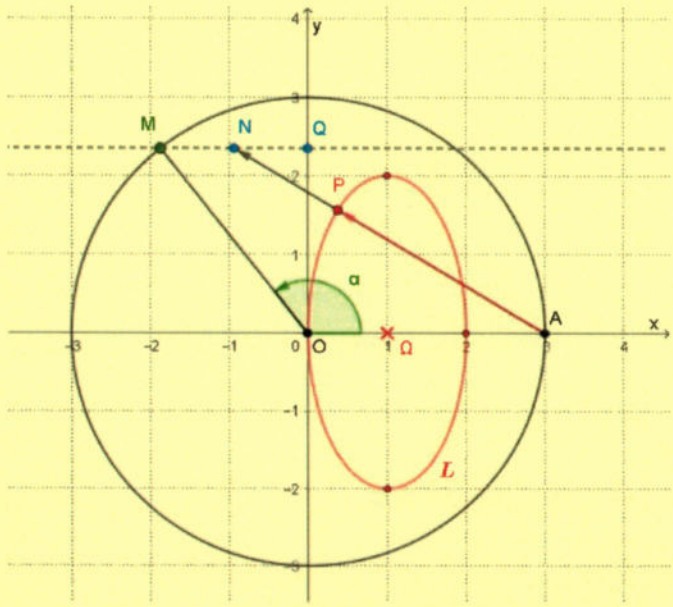
On a : $e = 1,\ p = 1,\ S(3;1)\ et\ F\left(\frac{5}{2};1\right)$. [4]

x	-5	1	3
$y = 1 - \sqrt{6-2x}$	-3	-1	1



[2]

Question 4 (12 pts)



Choix du repère : le R.O.N. donné

Choix du paramètre : l'angle orienté $\widehat{AOM} = \alpha$ où $\alpha \in [0; 2\pi]$.

Coordonnées de M : $M(3\cos\alpha; 3\sin\alpha)$

Coordonnées de Q : $Q(0; 3\sin\alpha)$

Coordonnées de N :

$$mil[QM] = N\left(\frac{3}{2}\cos\alpha\,; 3\sin\alpha\right)$$

Coordonnées de P :

$$\overrightarrow{AP} = \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_P - 3 \\ y_P \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} \frac{3}{2}\cos\alpha - 3 \\ 3\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_P - 3 = \cos\alpha - 2 \\ y_P = 2\sin\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_P = \cos\alpha + 1 \\ y_P = 2\sin\alpha \end{cases}$$

Donc les coordonnées de P sont : $P(\cos\alpha + 1\,; 2\sin\alpha)$.

Équations de $\mathbb{L}$:

$$\begin{cases} x = \cos\alpha + 1 \\ y = 2\sin\alpha \end{cases} \quad \text{où } \alpha \in [0; 2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = x - 1 & (1) \\ \sin\alpha = \frac{y}{2} & (2) \end{cases} \qquad \text{où } \alpha \in [0; 2\pi]$$

$$(1)^2 + (2)^2\colon\ (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \equiv \mathbb{E}$$

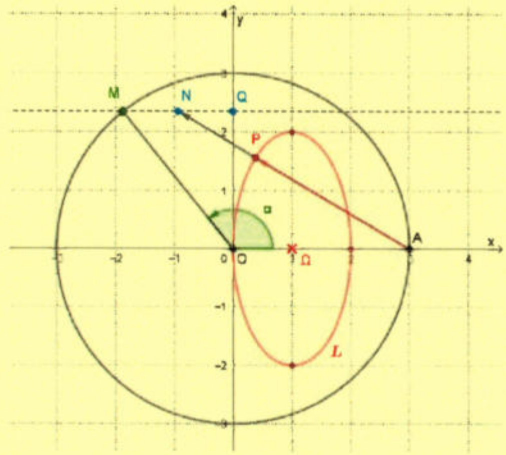
Comme $\alpha \in [0; 2\pi]$, $\mathbb{L}$ est l'ellipse $\mathbb{E} \equiv\ (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ de centre $\Omega(1; 0)$, avec $a = 1$ et $b = 2$.

Ses sommets sont les points : $(0; 0)$, $(2; 0)$, $(1; 2)$ et $(1; -2)$.

Alternative :

Choix du repère : le R.O.N. donné

On a : $M(x_M; y_M) \in C \Leftrightarrow x_M^2 + y_M^2 = 9 \Leftrightarrow y_M = \pm\sqrt{9 - x_M^2}$



Considérons d'abord le cas où M appartient au 1[er] ou 2[e] quadrant.

Alors $y_M \geq 0$ et on a $y_M = \sqrt{9 - x_M^2}$.

Choix du paramètre : l'abscisse x_M de M, où $x_M \in [-3; 3]$.

Coordonnées de M : $M\left(x_M; \sqrt{9 - x_M^2}\right)$

Coordonnées de Q : $Q\left(0; \sqrt{9 - x_M^2}\right)$

Coordonnées de N : $mil[QM] = N\left(\frac{x_M}{2}; \sqrt{9 - x_M^2}\right)$

Coordonnées de P :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_P - 3 \\ y_P \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} \frac{x_M}{2} - 3 \\ \sqrt{9 - x_M^2} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_P - 3 = \frac{1}{3}x_M - 2 \\ y_P = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x_M^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_P = \frac{1}{3}x_M + 1 \\ y_P = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x_M^2} \end{cases}$$

Donc les coordonnées de P sont : $P\left(\frac{1}{3}x_M + 1 ; \frac{2}{3}\sqrt{9 - x_M^2}\right)$.

Équations de $\mathbb{L}_1$:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}x_M + 1 & (1) \\ y = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x_M^2} & (2) \end{cases} \quad \text{où } x_M \in [-3; 3]$$

$(1): x_M = 3x - 3$

Dans (2): $y = \frac{2}{3}\sqrt{9 - (3x - 3)^2}$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{4}{9}[9 - 9(x - 1)^2] \;\; et \;\; y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 4 - 4(x - 1)^2 \;\; et \;\; y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x - 1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1}_{\equiv \mathbb{E}} \;\; et \;\; y \geq 0$$

$\mathbb{E}$ est l'ellipse de centre $\Omega(1; 0)$, avec $a = 1$ et $b = 2$. Ses sommets sont les points $(0 ; 0), (2 ; 0), (1 ; 2)$ et $(1 ; -2)$.

Donc $\mathbb{L}_1$ est la partie de $\mathbb{E}$ contenue dans le demi-plan d'inéquation $y \geq 0$.

Comme le problème est symétrique par rapport à l'axe (Ox), si M appartient au 3[e] ou 4[e] quadrant, on obtient comme lieu $\mathbb{L}_2$ de P, la partie de $\mathbb{E}$ contenue dans le demi-plan d'inéquation $y \leq 0$, car le centre de symétrie de $\mathbb{E}$ se situe sur (Ox).

Finalement $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \mathbb{E}$.