LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
Sessions 2022
CORRIGÉ – BARÈME

DISCIPLINE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques 1	CB	*Date de l'épreuve :*	20.09.22
		Durée de l'épreuve :	08:15 - 11:25

Question I (*obligatoire*) : 8(= 2+3+3) + 13(=8+5) = 21 points

1) Soit le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \text{cis}\,\frac{2\pi}{3}$

a) Les racines cubiques de 1 = cis 0 sont $z_k = \text{cis}\,\frac{2k\pi}{3}$ avec $k \in \{0,1,2\}$

Ainsi : $z_0 = \text{cis}\,0 = 1$,

$z_1 = \text{cis}\,\frac{2\pi}{3} = j$ et

$z_2 = \text{cis}\,\frac{4\pi}{3} = \left(\text{cis}\,\frac{2\pi}{3}\right)^2 = j^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. (2 pts)

De plus $1+j+j^2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$

b) On a $j^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \bar{j}$ et $\frac{1}{j} = \frac{1}{\text{cis}\,\frac{2\pi}{3}} = \text{cis}\,\frac{-2\pi}{3} = \text{cis}\,\frac{4\pi}{3} = j^2$.

Par ailleurs, $j^{2023} = \left(j^3\right)^{674} \cdot j = j$ car $j^3 = 1$ et $\left(\frac{1}{1+j}\right)^9 = \left(\frac{1}{-j^2}\right)^9 = (-j)^9 = -\left(j^3\right)^3 = -1$ (3 pts)

c) ABC est équilatéral car AB= $|b-a| = \left|-3+\sqrt{3}i\right| = \sqrt{12}$, AC= $|c-a| = \left|-3-\sqrt{3}i\right| = \sqrt{12}$ et

BC= $|b-c| = \left|0+2\sqrt{3}i\right| = \sqrt{12}$.

De plus, $a+bj+cj^2 = a+bj+c(-1-j)$

$= a-c + (b-c)\,j = 3 + i\sqrt{3} + 2i\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ (3 pts)

$= 3 + i\sqrt{3} - i\sqrt{3} - 3 = 0$

2) Dans $\mathbb{C}$ on considère le polynôme P défini par

$P(z) = z^3 - \left[2m + i(1+4m)\right]z^2 + 2m\left[-2 + i(1+4m)\right]z + 8m^2$ où m est un paramètre complexe

a) On a $P(i) = i^3 - \left[2m + i(1+4m)\right]i^2 + \left[-4m + 2mi(1+4m)\right]i + 8m^2$

$= -i + 2m + i(1+4m) - 4mi - 2m(1+4m) + 8m^2$

$= -i + 2m + i + 4mi - 4mi - 2m - 8m^2 + 8m^2 = 0$

Comme i est une racine de P, P(z) est divisible par z–i
Schéma de Horner

	1	-2m-i-4mi	$-4m+2mi+8m^2i$	$8m^2$
i		i	4m-2mi	$-8m^2$
	1	-2m-4mi	$8m^2i$	0

Et $P(z) = (z-i)\,[\,z^2-2m(1+2i)z+8m^2i]$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z=i$ ou $Q(z) = z^2-2m(1+2i)z+8m^2i = 0$

Le discriminant de $Q(z)=0$ est $\Delta = 4m^2(1+2i)^2 - 32\,m^2i = 4m^2\,(-3-4i)$

On cherche x+yi, RCC de –3–4i vérifiant $\begin{cases} x^2-y^2=-3 & (1) \\ 2xy=-4 & (2) \\ x^2+y^2=\sqrt{25}=5 & (3) \end{cases}$, avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

(1)+(3) : $2x^2 = 2 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$
(3) –(1) : $2y^2=8 \Leftrightarrow y=2$ ou $y=-2$
Par (2), on sait que x et y sont de signes contraires.
Les RCC de –3–4i sont 1–2i et –1+2i , par conséquent les RCC de Δ sont 2m(1–2i) et –2m(1–2i).

Les racines de Q sont $z_1 = \dfrac{2m(1+2i)+2m(1-2i)}{2} = \dfrac{4m}{2} = 2m$ et $z_2 = \dfrac{2m(1+2i)-2m(1-2i)}{2} = \dfrac{8mi}{2} = 4mi$

Finalement l'ensemble des solutions de l'équation P(z) = 0 est S= { i ; 2m ; 4mi } (8 pts)

b) On considère A(i), B(2m) et C(4mi) avec $m \in \mathbb{C}$

1. $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i \Leftrightarrow \dfrac{4mi-i}{2m-i} = i \Leftrightarrow 4mi - i = 2mi+1$

$\Leftrightarrow m = \dfrac{1+i}{2i} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

Dans ce cas, on a $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \arg i = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et (AB) $\perp$ (AC) (2,5 pts)

2. On a B(2m), soit B(1-i) ou B$\left(\sqrt{2}\mathrm{cis}\dfrac{-\pi}{4}\right)$ et C(4mi) soit C(2+2i) ou C$\left(2\sqrt{2}\mathrm{cis}\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Les affixes de M et N s'obtiennent en multipliant celles de B et C par cis $\dfrac{\pi}{4}$.

Ainsi $z_M = \sqrt{2}\mathrm{cis}\dfrac{-\pi}{4} \cdot \mathrm{cis}\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}0 = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

Et $z_N = 2\sqrt{2}\mathrm{cis}\dfrac{\pi}{4} \cdot \mathrm{cis}\dfrac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\dfrac{\pi}{2} = 2\sqrt{2}\,i \in i\,\mathbb{R}$. (2,5 pts)

Question II (*obligatoire*) : 2+4+7+3 = 16 points

1) Il y a C_{10}^{3} pour placer les 1, ensuite C_{7}^{3} pour placer les 2, les 3 prennent les places restantes.

En tout : $C_{10}^{3}\,C_{7}^{3} = 120 \cdot 35 = 4200$ moyens de placer ces 3 chiffres, donc 4200 nombres différents. (2 pts)

Calcul direct : $\dfrac{10!}{3!3!4!} = 4200$ nombres différents.

2) a) p(deux « 3 » et un « 2 ») $= \dfrac{C_4^2 C_3^1}{C_{10}^3} = \dfrac{3}{20} = 15\%$ (1,5 pts)

b) p(au moins 2 jetons portent des numéros différents)

$= 1-$ p(3 jetons de numéros identiques) $= 1 - \dfrac{C_3^3 + C_3^3 + C_4^3}{C_{10}^3} = \dfrac{19}{20} = 95\%$

ou bien: p (2 « 1 » ou 2 « 2 » ou 2 « 3 » ou «1, 2 et 3 »)= $\dfrac{2C_3^2C_7^1 + C_4^2C_6^1 + C_3^1C_3^1C_4^1}{C_{10}^3} = \dfrac{19}{20}$ (2,5 pts)

3) a) Gains possibles : $X \in \{2; 4; 6; -2\,; -3\}$ (1 pt)

b) X=2 : si on tire 2 jetons marqués « 1 », donc $p(X=2) = \dfrac{C_3^2}{C_{10}^2} = \dfrac{1}{15}$

X =4 : si on tire 2 jetons marqués « 2 » , donc $p(X=4) = \dfrac{C_3^2}{C_{10}^2} = \dfrac{1}{15}$

X=6 : si on tire 2 jetons marqués « 3 », donc $p(X=6) = \dfrac{C_4^2}{C_{10}^2} = \dfrac{2}{15}$

X= –2 : si on tire 1 jeton marqué « 2 » et un marqué « 1 », donc $p(X=-2) = \dfrac{C_3^1C_3^1}{C_{10}^2} = \dfrac{1}{5}$

X= –3: si on tire 1 jeton marqué « 3 » et un différent de « 3 », donc $p(X=-3) = \dfrac{C_4^1C_6^1}{C_{10}^2} = \dfrac{8}{15}$

Loi de probabilité (4 pts)

x_i	-3	-2	2	4	6
$p_i = p(X=x_i)$	$\frac{8}{15}$	$\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$

c) Espérance mathématique :

E(X)= 2p(X=2) + 4p(X=4) + 6p(X=6) – 2p(X=-2) – 3p(X=-3) $= \dfrac{-12}{15} = -\dfrac{4}{5} = -0{,}80$ €

En moyenne, on perd en jouant à ce jeu donc le jeu est défavorable au joueur. (2 pts)

4) Expérience de Bernoulli ; succès (on obtient 1) : $p=\frac{3}{10}$; échec (on obtient 2 ou 3) : $q=\frac{7}{10}$

On répète 20 fois l'expérience. Si X est le nombre de succès, X suit la loi binomiale de paramètres 20 et $\frac{3}{10}$

$p(8 \le X \le 12) = \sum\limits_{k=8}^{12} C_{20}^k \left(\dfrac{3}{10}\right)^k \left(\dfrac{7}{10}\right)^{20-k} = \dfrac{1}{10^{20}} \sum\limits_{k=8}^{12} C_{20}^k 3^k 7^{20-k} \approx 22{,}6\ \%$ (3 pts)

Question III (*obligatoire*) 2+5+2= 9 points

a) $P \equiv y^2+2x+6y+4=0 \Leftrightarrow (y+3)^2+2x-5=0 \Leftrightarrow (y+3)^2=-2\left(x-\frac{5}{2}\right)$

Posons $\begin{cases} X = x-\dfrac{5}{2} \\ Y = y+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X+\dfrac{5}{2} \\ y = Y-3 \end{cases}$ et $S\left(\frac{5}{2};-3\right)$

Dans le repère $\left(S,\vec{i},\vec{j}\right)$: $P \equiv Y^2=-2X$ (2 pts)

b) $\Gamma \equiv 3x^2+2y^2-12x+12y+28=0$

$\Leftrightarrow 3(x^2-4x+4)+2(y^2+6y+9)+28-12-18=0 \Leftrightarrow 3(x-2)^2+2(y+3)^2=2 \Leftrightarrow \dfrac{(x-2)^2}{\frac{2}{3}}+\dfrac{(y+3)^2}{1}=1$

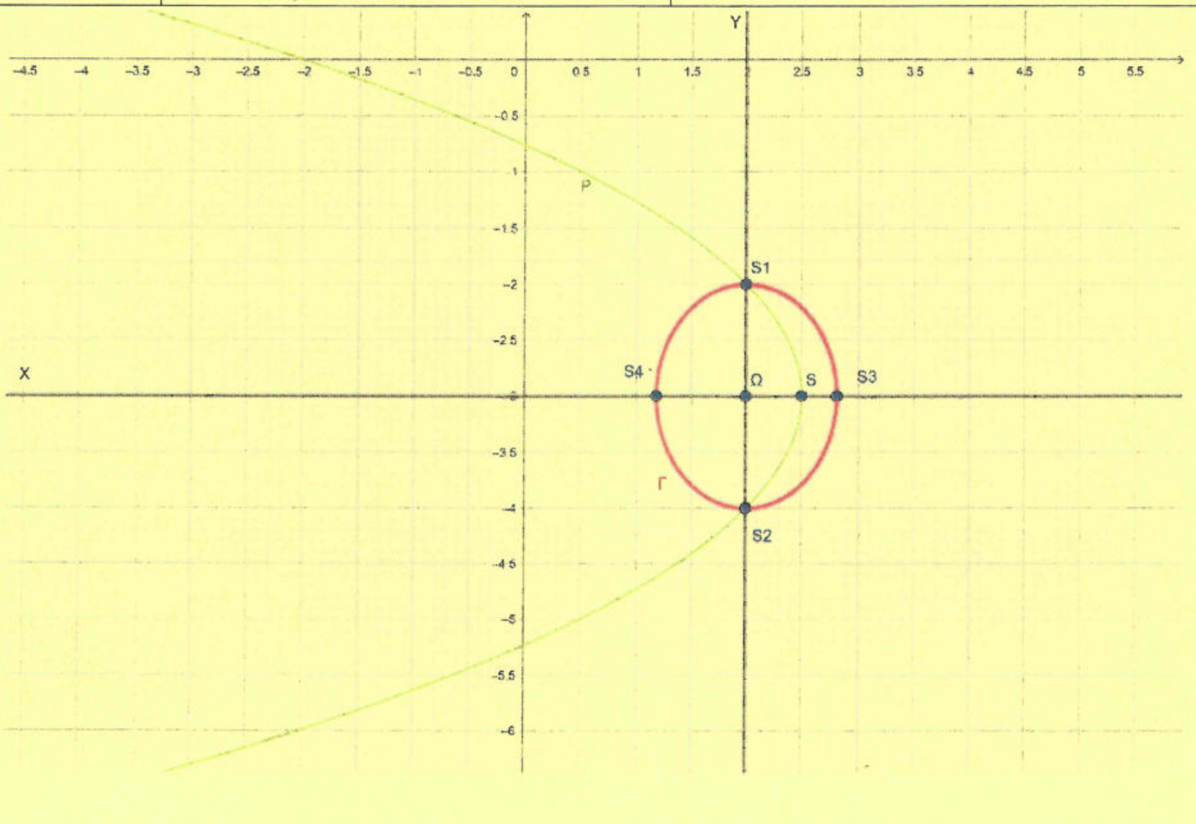
En posant $\Omega(2\,;-3)$, $X=x-2$ et $Y=y+3$ l'équation de Γ dans $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$ est $\dfrac{X^2}{\frac{2}{3}}+\dfrac{Y^2}{1}=1$.

$a=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $b=1$ et $c^2=b^2-a^2=\dfrac{1}{3}$ et l'excentricité vaut $e=\dfrac{c}{b}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Γ est une ellipse de centre Ω d'axe focal (ΩY). Eléments caractéristiques : (5 pts)

	$\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$	$\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$
Axe focal	$(\Omega Y) \equiv X=0$	$x=2$
Foyers	$F\left(0;\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ et $F'\left(0;-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$F\left(2;\dfrac{\sqrt{3}-9}{3}\right)$ et $F'\left(2;-\dfrac{\sqrt{3}+9}{3}\right)$
Sommets	$S_1(0,1), S_2(0,-1)$, $S_3\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3};0\right), S_4\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{3};0\right)$,	$S_1(2,-2)$ et $S_2(2,-4)$, $S_3\left(2+\dfrac{\sqrt{6}}{3};-3\right), S_4\left(2-\dfrac{\sqrt{6}}{3};-3\right)$
Directrices	$d_F : Y=\dfrac{b^2}{c}=\sqrt{3}$ et $d_{F'} : Y=-\sqrt{3}$	$d_F : y=\sqrt{3}-3$ et $d_{F'} : y=-\sqrt{3}-3$

c)



(2 pts)

Question IV (*obligatoire*) : 5 points

a) $\Gamma \equiv \begin{cases} x = f(t) = -2\tan t \\ y = g(t) = \dfrac{3}{\cos t} \end{cases} \quad t \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

Pour $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ on a f(-t) = -2 tan(-t) = 2 tan t = – f(t) et g(-t) = g(t)

On en déduit que la courbe Γ admet l'axe des y comme axe de symétrie (1 pt)

b) $\begin{cases} x = -2\tan t \\ y = \dfrac{3}{\cos t} \end{cases}, t \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{-2} = \tan t \\ \dfrac{y}{3} = \dfrac{1}{\cos t} \end{cases}, t \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$

Comme $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ on a $x \in \mathbb{R}$ et $y>0$

De plus $\left(\dfrac{x}{-2}\right)^2 - \left(\dfrac{y}{3}\right)^2 = \tan^2 t - \dfrac{1}{\cos^2 t} = \tan^2 t - \left(1+\tan^2 t\right) = -1.$

Ainsi une équation cartésienne de Γ est $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{4} = 1 \quad (y>0)$ et Γ est la branche d'hyperbole d'axe focal (Oy) située au-dessus de l'axe des x. (4 pts)

Question V (*question au choix*) : 4+1+4= 9 points

1) Déterminons les points d'intersection de d et $\mathcal{H}$: $\begin{cases} 4x^2 - 9y^2 = 36 \\ y = x + b \end{cases}$

Par substitution on obtient : $4x^2-9(x+b)^2=36 \Leftrightarrow 5x^2+18bx+(36+9b^2)=0$

Le nombre de points d'intersection dépend du signe de $\Delta=18^2b^2-20(36+9b^2) = 144(b^2-5)$:

si $b \in \left]-\infty,-\sqrt{5}\right[\cup \left]\sqrt{5},+\infty\right[$: $\Delta>0$ donc d et $\mathcal{H}$ sont sécantes en deux points,

si $b \in \left\{-\sqrt{5};\sqrt{5}\right\}$: $\Delta=0$ donc d est tangente à $\mathcal{H}$,

si $b \in \left]-\sqrt{5};\sqrt{5}\right[$: $\Delta<0$ donc d est extérieure à $\mathcal{H}$. (4 pts)

2) Une équation de la tangente à $\mathcal{H} \equiv 4x^2-9y^2=36$ au point $A\left(\dfrac{9\sqrt{5}}{5},\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)$ est $4x\cdot\dfrac{9\sqrt{5}}{5} - 9y\cdot\dfrac{4\sqrt{5}}{5} = 36$ ou

$\sqrt{5}x - \sqrt{5}y = 5$ c'est-à-dire $y = x-\sqrt{5}$.

<u>Remarque</u> : on retrouve y = x+b avec $b = -\sqrt{5}$ traité en a) (1 pt)

3) Une équation de la tangente à $\mathcal{H}$ au point $I(x_0,y_0)$ est $t \equiv 4xx_0-9yy_0=36$

Or, $B(0,1) \in t$, donc $0-9y_0 = 36 \Leftrightarrow y_0 = -4$

$I(x_0;-4) \in \mathcal{H}$, donc $4x_0^2 - 9\cdot 16 = 36 \Leftrightarrow x_0^2 = 45 \Leftrightarrow x_0 = 3\sqrt{5}$ ou $x_0 = -3\sqrt{5}$

Les points de contact sont $I_1(3\sqrt{5}, -4)$ et $I_2(-3\sqrt{5}, -4)$

Les équations des tangentes issues de B sont :

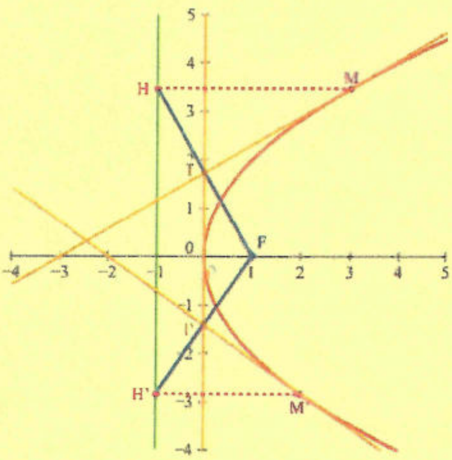
$t_1 \equiv 4x \cdot 3\sqrt{5} - 9y \cdot (-4) = 36 \Leftrightarrow \sqrt{5}x + 3y = 3 \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{5}}{3}x + 1$

$t_2 \equiv 4x \cdot (-3\sqrt{5}) - 9y \cdot (-4) = 36 \Leftrightarrow -\sqrt{5}x + 3y = 3 \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{5}}{3}x + 1$ (4 pts)

<u>Autre méthode</u> : La tangente t ne peut pas être l'axe des ordonnées, qui passe par B, car sinon t et $\mathcal{H}$ n'auraient pas de point d'intersection. En effet, si x=0 on aurait : $-9y^2=36$ ce qui est impossible.
Par conséquent, $t \equiv y = mx+1$ car $B(0,1) \in t$
En remplaçant y de t dans l'équation de $\mathcal{H}$: $4x^2-9(mx+1)^2=36 \Leftrightarrow (4-9m^2)x^2-18mx-45=0$
Si $m = \pm\frac{2}{3}$ la droite t serait parallèle aux asymptotes et t serait sécante et non tangente à $\mathcal{H}$,
Sinon, la condition de tangence est $\Delta = 0 \Leftrightarrow 18^2m^2+4\cdot 45\cdot(4-9m^2) = 0 \Leftrightarrow 9m^2+5(4-9m^2) = 0$
$\Leftrightarrow 36m^2=20 \Leftrightarrow m^2=\frac{5}{9} \Leftrightarrow m=\frac{\sqrt{5}}{3}$ ou $m=-\frac{\sqrt{5}}{3}$
On retrouve les équations de t_1 et t_2.
Pour déterminer les points de contact, on utilise $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{18m}{2(4-9m^2)}$, puis on remplace dans t.

Question VI (*question au choix*) : 5+4= 9 points

1) Notons $M(x_M ; y_M)$ un point de la parabole distinct du sommet S(0;0) et $F(\frac{p}{2};0)$ le foyer.



Comme la directrice a pour équation $x=-\frac{p}{2}$ on a $H\left(-\frac{p}{2};y_M\right)$
Les coordonnées du milieu I du segment [FH] sont donc $\left(0;\frac{y_M}{2}\right)$.

Par ailleurs, la tangente en M a pour équation :
$yy_M = p(x+x_M)$ (1)
et la tangente au sommet est l'axe des ordonnées.

Leur point d'intersection est obtenu pour x=0 qu'on remplace dans (1) pour avoir $y = \frac{px_M}{y_M}$.

Or, le point M appartient à la parabole et vérifie $y_M^2 = 2px_M$ donc $y=\frac{px_M}{y_M} = \frac{y_M^2}{2y_M} = \frac{y_M}{2}$. Le point d'intersection $\left(0;\frac{y_M}{2}\right)$ coïncide bien avec I. (5 pts)

2) Les sommets de E_1 sont $S_1(3;0)$, $S_2(-3;0)$, $S_3(0;2)$ et $S_4(0;-2)$. On en déduit les sommets du rectangle ABCD circonscrit à E_1 : A(-3 ;2), B(3 ;2), C(3,-2) et D(–3 ;-2).

L'équation réduite de l'ellipse E_2 circonscrite au rectangle ABCD est de la forme $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a>0, b>0)

Comme cette ellipse passe par I(0,4), on a b=4 et $E_2 \equiv \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{16}=1$.

Comme E_2, est circonscrite à ABCD, on a $A(-3;2) \in E_2$, donc $\frac{9}{a^2}+\frac{4}{16}=1 \Leftrightarrow a^2=12$.

Finalement, $E_2 \equiv \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$ (4 pts)

L'axe focal est (Oy) et $c^2=b^2-a^2= 4$. Par conséquent, l'excentricité vaut $e=\frac{c}{b}=\frac{1}{2}$.