LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
Sessions 2022

DISCIPLINE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques 1	CB	*Date de l'épreuve :*	20.09.22
		Durée de l'épreuve :	08:15 - 11:25
		Numéro du candidat :	

Instructions

- L'élève répond à toutes les questions de la partie obligatoire.
- L'élève répond à exactement 1 question de la partie au choix. Il indique obligatoirement son choix en marquant d'une croix la case appropriée ci-dessous.

Seule la réponse correspondant à la question choisie par l'élève sera évaluée. Toute réponse à une question non choisie par l'élève est cotée à 0 point. En l'absence de choix renseigné sur la page de garde la partie au choix est cotée à 0 point.

Partie obligatoire (51 points)			
Question	**Nb points**	**Sujet**	**Obligatoire**
I	**21**	**Nombres complexes**	**X**
II	**16**	**Combinatoire, lois de probabilité**	**X**
III	**9**	**Coniques, applications des coniques**	**X**
IV	**5**	**Trajectoires**	**X**
Partie au choix (9 points)			
Choisissez 1 question parmi les 2 suivantes et indiquez votre choix avec un X			
Question	**Nb points**	**Sujet**	**Choix du candidat**
V	**9**	**Coniques, applications des coniques**	
VI	**9**	**Coniques, applications des coniques**	

<u>Question I (*obligatoire*) : 8(=2+3+3) + 13(=8+5) = 21 points</u>

1) Soit le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

   a) Prouver que les racines cubiques de 1 sont 1, j et j^2. Vérifier que $1+j+j^2=0$.

   b) Montrer que $j^2 = \frac{1}{j} = \overline{j}$, puis calculer rapidement j^{2023} et $\left(\frac{1}{1+j}\right)^9$.

   c) Dans le plan de Gauss, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a =1, b = $-2+i\sqrt{3}$ et c = $-2-i\sqrt{3}$. Prouver que ABC est un triangle équilatéral et que $a+bj+cj^2=0$.

2) Dans $\mathbb{C}$ on considère le polynôme P défini par
   $P(z) = z^3 - \left[2m + i(1+4m)\right]z^2 + 2m\left[-2 + i(1+4m)\right]z + 8m^2$ où m est un paramètre complexe.

   a) Vérifier que i est une racine de P, puis résoudre l'équation P(z) = 0.

   b) Dans le plan gaussien on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives i, 2m et 4im.

      1. Déterminer la valeur du paramètre m afin que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$. Dans ce cas, que peut-on dire des droites (AB) et (AC) ?

      2. On considère la rotation r de centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Soit m la valeur trouvée en 1.
      Déterminer les affixes z_M et z_N des points M et N, images respectives de B et C par r et vérifier que ces points sont situés sur les axes du repère.

<u>Question II (*obligatoire*) : 2+4+7+3 = 16 points</u>

Une urne contient dix jetons : trois jetons marqués « 1 », trois jetons marqués « 2 » et quatre jetons marqués « 3 ».

1) En disposant ces 10 jetons l'un à côté de l'autre de toutes les manières possibles, combien de nombres différents à 10 chiffres obtient-on ?

2) Un joueur tire simultanément 3 jetons de l'urne et on suppose l'équiprobabilité des tirages.
   Calculer la probabilité des évènements :
   a) on obtient deux « 3 » et un « 2 »
   b) au moins 2 jetons portent des numéros différents.

3) Le joueur tire simultanément 2 jetons. S'ils portent le même numéro x, le joueur gagne le double de ce numéro : 2 x euros. Si les 2 jetons portent des numéros différents, le joueur perd la somme correspondant au plus grand de ces 2 numéros *(exemples : 2 et 2 gagne 4 euros , 1 et 3 perd 3 euros).*
   On note X la variable aléatoire correspondant au gain du joueur (en notant négativement les pertes).
   a) Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?
   b) Déterminer la loi de probabilité de X. *(on donnera les probabilités en fractions irréductibles*)
   c) Est-ce que ce jeu est favorable au joueur ?

4) Le joueur tire un jeton, note le numéro et le remet dans l'urne. En effectuant 20 tirages quelle est la probabilité *(valeur approchée exprimée en % à 0,1 près par défaut)* que le nombre de « 1 » obtenus soit compris non strictement entre 8 et 12 ?

Question III (*obligatoire*) : 2+5+2 = 9 points

Soit $\mathcal{P}$ le repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unité 2 cm.

a) Réduire l'équation cartésienne de la parabole $P \equiv y^2+2x+6y+4=0$ et préciser les coordonnées de son sommet S.

b) Identifier la conique $\Gamma \equiv 3x^2+2y^2-12x+12y+28 = 0$ et donner dans $\mathcal{P}$ ses éléments caractéristiques (centre, foyers, sommets, directrices, excentricité, axe focal, asymptotes éventuelles).

c) Esquisser P et Γ ainsi que leurs sommets dans $\mathcal{P}$.

Question IV (*obligatoire*) : 1+4= 5 points

On considère la courbe Γ dont on donne une représentation paramétrique

$$\Gamma \equiv \begin{cases} x = -2\tan t \\ y = \dfrac{3}{\cos t} \end{cases} \quad , \ t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[.$$

a) Comparer les positions des points $M(t_0)$ et $M(-t_0)$ lorsque t_0 est un réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
Quel élément de symétrie admet Γ ?

b) Identifier et donner une équation cartésienne de la courbe (*on ne demande pas de tracer Γ*) .

Question V (*question au choix*) : 4+1+4 = 9 points

Dans un repère orthonormé, on considère l'hyperbole $\mathcal{H} \equiv 4x^2-9y^2 = 36$ et la droite $d \equiv y= x+b$ $(b\in\mathbb{R})$.

a) Discuter suivant les valeurs du paramètre b la position de d et $\mathcal{H}$.

b) Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{H}$ au point $A\left(\frac{9\sqrt{5}}{5};\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$.

c) Déterminer les équations réduites des tangentes à $\mathcal{H}$ issues de B (0; 1) et préciser les points de contact.

Question VI (*question au choix*) : 5+4 = 9 points

1) Soit, dans un repère orthonormé, la parabole d'équation $y^2 = 2px$ de foyer F. On note M un point de la parabole distinct du sommet, et H son projeté orthogonal sur la directrice. Démontrer que la tangente à la parabole en M coupe sa tangente au sommet au milieu du segment [F H].

2) Dans un repère orthonormé, l'ellipse $E_1 \equiv \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ est inscrite dans un rectangle ABCD dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées. Une autre ellipse E_2, centrée à l'origine, est circonscrite au rectangle ABCD et passe par I(0,4). Déterminer l'excentricité de E_2.

Examen de fin d'études secondaires Sections B, C, D, E, F

Formules trigonométriques

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$		
$\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$	$\sin^2 x = \dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$	$1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\cos(-x) = \cos x$
$\tan(\pi - x) = -\tan x$	$\tan(\pi + x) = \tan x$	$\tan(-x) = -\tan x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$	
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$	
$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$	
$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$	$\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$	
$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$		
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$	$\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$	
$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$		
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$	
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$	
$\sin 2x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$	$\cos 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$	$\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$
$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$	$\cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$	
$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$	$\tan p + \tan q = \dfrac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$	
$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$		
$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$	$\tan p - \tan q = \dfrac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$	
$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$		
$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$		
$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$		
$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$		