LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2021

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques I	**B**	*Durée de l'épreuve : 180 minutes* *Date de l'épreuve : 21/05/2021*

<u>Question 1 (5 + 5 + (3 + 2 + 3) = 18 points)</u>

1. Factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme P défini par $P(z) = z^4 + 2z^3 + 11z^2 + 18z + 18$ sachant qu'il admet deux racines imaginaires pures opposées.

2. Soit le nombre complexe $z' = \frac{iz+4-3i}{iz+i}$, avec $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

   Déterminer dans le plan de Gauss l'ensemble E= $\{M(z)/z' \in i\mathbb{R}\}$.

3. Soit le nombre complexe z défini par : $z = \sqrt{2\sqrt{5}-\sqrt{10}} - i\sqrt{2\sqrt{5}+\sqrt{10}}$
   a. Calculer z^2 sous forme algébrique et en déduire une forme trigonométrique de z^2.
   b. En déduire une forme trigonométrique de z .
   c. Déduire de ce qui précède la valeur exacte de $tan\left(\frac{13\pi}{8}\right)$. Simplifier au maximum.

<u>Question 2 ((2 + 5 + 2) + (3 + 7) = 19 points)</u>

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$. Tous les résultats sont à exprimer dans ce repère.

1. Soit Γ la conique d'équation cartésienne $2x^2 - 3 = y^2 + 2y$.
   a. Déterminer la nature et l'équation réduite de Γ.
   b. Déterminer les éléments caractéristiques suivants de Γ : l'excentricité, l'axe focal, les foyers, les sommets, les directrices et les asymptotes .
   c. Faire une figure complète**.**

2. Soit P la conique d'équation $x^2 + 25y^2 + 50\sqrt{5}y + 100 = 0$.
   a. Montrer que P est une ellipse et déterminer l'équation réduite.
   b. Déterminer des équations des tangentes à P issues du point A (5 ; - 4 - $\sqrt{5}$) .

Question 3 (3 + (3 + 2 + 2 + 3) + (3 + 2) = 18 points)

1. Déterminer le terme en x^8 dans le développement de $(\sqrt{5}x^2 - \frac{2}{\sqrt{5}\cdot x})^{13}$.

2.A.

Pour les vacances d'été 2021 vous envisagez de partir seul pour les vacances en Suisse. Vous choisissez entre deux routes pour y aller; la première passe uniquement par l'Allemagne, la deuxième uniquement par la France. Malgré la situation actuelle, vous n'avez pas de test récent négatif pour le Corona. Vous savez que l'Allemagne contrôle chaque voyageur, la France en moyenne chaque cinquième voyageur et la Suisse en moyenne deux voyageurs sur trois. De plus, en cas d'entrée sans test négatif, en Allemagne vous payez impérativement une amende de 21 €, en France 100 € et en Suisse 40 €. On appelle X la variable aléatoire ''amende du trajet Luxembourg-Allemagne-Suisse'', et Y la variable aléatoire ''amende du trajet Luxembourg-France-Suisse''.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.
b. Déterminer la loi de probabilité de Y.
c. Votre choix du trajet dépend uniquement de l'amende à payer. Quel trajet choisissez-vous?
d. Vous choisissez pour le trajet l'une des deux routes au hasard. Quelle est la probabilité de devoir payer une amende totale inférieure à 50 € sur ce trajet ?

2.B.

Ayant réussi votre bac, et en poursuivant les études à Nancy (France), vous devez vous rendre régulièrement de Luxembourg à Nancy, sous les mêmes conditions que dans 2.A..

a. Quelle est la probabilité, arrondie à l'entier en %, d'être contrôlé au plus deux fois sur dix trajets?
b. Combien de fois pouvez-vous risquer de faire le trajet sans test négatif, avec une probabilité d'au moins 10% de ne jamais être contrôlé?

Question 4 (5 points)

Ecrire une équation cartésienne et représenter graphiquement dans un repère orthonormé la courbe T définie par :

$$\begin{cases} x = 1 - \cos\alpha \\ y = 3 + \sin\alpha \end{cases} \quad où \ \ \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \pi\right[$$

Examen de fin d'études secondaires — Sections B, C, D

Formules trigonométriques

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} \qquad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \qquad 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x \qquad \tan(\pi + x) = \tan x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \cos\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\tan\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cot x \qquad \tan\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \qquad \cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \qquad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \qquad \cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\tfrac{p-q}{2}\cos\tfrac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\tfrac{p+q}{2}\sin\tfrac{p-q}{2}$$

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$

$$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

$$\sin x \cos y = \tfrac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \sin y = \tfrac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$