Question 1

1. $z_1 = -\sqrt{3} + i$ forme algébrique

$z_1 = r_1 \cdot \cancel{\cos}\,\mathrm{cis}\, \varphi_1 = a + bi$

$* \; r_1 = |z_1| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$

$$\left.\begin{array}{l} * \cos\varphi_1 = \dfrac{a}{r_1} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi_1 = \dfrac{b}{r_1} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \varphi_1 = \left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \varphi_1 \in \mathrm{II}^e \text{ quadrant} \end{array}$$

2

Ainsi : $\varphi_1 = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

forme trigonométrique de z_1 : $z_1 = 2 \,\mathrm{cis}\, \dfrac{5\pi}{6}$

$$z_2 = \frac{3\sqrt{3}\cdot(i-1) - 9\cdot(1+i)}{\sqrt{3} - i} \cdot \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i}$$

$$= \frac{9\cdot(i-1) + i\cdot 3\sqrt{3}\cdot(i-1) - 9\sqrt{3}\cdot(1+i) - 9i\,(1+i)}{3+1}$$

2

$$= \frac{\cancel{9i} - \cancel{9} - 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3}\,i - 9\sqrt{3} - 9\sqrt{3}\,i - \cancel{9i} + \cancel{9}}{4} = \frac{-12\sqrt{3} - 12\sqrt{3}\,i}{4}$$

$$= -3\sqrt{3} - 3\sqrt{3}\,i \quad \text{forme algébrique}$$

$z_2 = r_2 \cdot \mathrm{cis}\, \varphi_2 = a + bi$

$* \; r_2 = |z_2| = \sqrt{(-3\sqrt{3})^2 + (-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{27+27} = 3\sqrt{6}$

$$\left.\begin{array}{l} * \cos\varphi_2 = \dfrac{a}{r_2} = \dfrac{-3\sqrt{3}}{3\sqrt{6}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi_2 = \dfrac{b}{r_2} = \dfrac{-3\sqrt{3}}{3\sqrt{6}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \varphi_2 = \left(\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \varphi_2 \in \mathrm{III}^e \text{ quadrant} \end{array}$$

Ainsi : $\varphi_2 = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

2

forme trigonométrique de z_2 : $z_2 = 3\sqrt{6} \cdot \mathrm{cis}\, \dfrac{5\pi}{4}$

2. $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\cdot \mathrm{cis}\,\frac{5\pi}{6}}{3\sqrt{6}\cdot \mathrm{cis}\,\frac{5\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{6}}{3\cdot 6} \cdot \mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{9} \cdot \mathrm{cis}\, \frac{10\pi - 15\pi}{12}$$

1

$$= \frac{\sqrt{6}}{9} \cdot \mathrm{cis}\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \quad (1) \text{ forme trigonométrique}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-\sqrt{3}+i}{-3\sqrt{3}-3\sqrt{3}\,i} = \frac{-\sqrt{3}+i}{-3\sqrt{3}(1+i)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1-i}{1-i}$$

$$= -\frac{(-\sqrt{3}+i)\cdot\sqrt{3}\cdot(1-i)}{9(1+1)}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{18}\cdot\left(-\sqrt{3}+\sqrt{3}\,i+i+1\right)$$

$$= +\frac{1}{18}\cdot\left(3-3i-\sqrt{3}\,i-\sqrt{3}\right)$$

2

$$= \frac{1}{18}\cdot\left[(3-\sqrt{3})+i\,(-3-\sqrt{3})\right]$$

$$= \frac{3-\sqrt{3}}{18} + \frac{-3-\sqrt{3}}{18}\cdot i \quad (2) \text{ forme algébrique}$$

Comme $(1) = (2)$, on a : $\frac{\sqrt{6}}{9}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right) = \frac{3-\sqrt{3}}{18} + \frac{-3-\sqrt{3}}{18}\cdot i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{3-\sqrt{3}}{18}\cdot\frac{9}{\sqrt{6}} \\ \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-3-\sqrt{3}}{18}\cdot\frac{9}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \\ \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-3-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{3\sqrt{6}-\sqrt{18}}{2\cdot 6} \\ \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-3\sqrt{6}-\sqrt{18}}{2\cdot 6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2\cdot 6} \\ \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2\cdot 6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

3

d'où : $\tan\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)}{\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)} = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

$$\tan\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

2

$$= \frac{-(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{6-2} = -\frac{6+2+2\sqrt{12}}{4}$$

$$= -\frac{8+4\sqrt{3}}{4}$$

$$= -2-\sqrt{3}$$

4. $z_1 = -\sqrt{3}+i = 2\cdot \operatorname{cis}\frac{5\pi}{6}$

$$\begin{cases} r = \sqrt[3]{2} \\ 3\alpha = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[3]{2} \\ \alpha = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

3

racines cubiques : $\sqrt[3]{2}\cdot \operatorname{cis}\frac{5\pi}{18}$; $\sqrt[3]{2}\cdot \operatorname{cis}\frac{17\pi}{18}$; $\sqrt[3]{2}\cdot \operatorname{cis}\frac{29\pi}{18}$

Question 2

bi est une racine de $P(z)$ ssi $P(bi)=0$

$(bi)^3-(3+2i)(bi)^2+3bi(5+i)+2\cdot(7i-9)=0$

$\Leftrightarrow -b^3i-(3+2i)\cdot(-b^2)+15bi-3b+14i-18=0$

$\Leftrightarrow i(-b^3+2b^2+15b+14)+(3b^2-3b-18)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -b^3+2b^2+15b+14=0 \\ 3b^2-3b-18=0 \quad |:3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -b^3+2b^2+15b+14=0 \\ \underbrace{b^2-b-6}_{(b+2)\cdot(b-3)}=0 \end{cases}$

$b=-2$: $8+8-30+14 \overset{!}{=} 0$

$b=3$: $-27+18+45+14 \neq 0$

Donc : $b=-2$ est solution et alors $z=-2i$ est une racine de $P(z)$

	1	$-3-2i$	$15+3i$	$14i-18$
$-2i$		$-2i$	$-8+6i$	$-14i+18$
	1	$-3-4i$	$7+3i$	0

$P(z)=(z+2i)\cdot\left[\underbrace{z^2+(-3-4i)z+7+3i}\right]$

$\Delta=(-3-4i)^2-4\cdot(7+3i)$
$=9+24i-16-28-36i$
$=-35-12i$

Déterminons les racines carrées complexes de Δ

Soit $\delta=x+yi$ tel que $\delta^2=\Delta$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-35 \\ 2xy=-12 \quad |:2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-35 \\ xy=-6 \end{cases}$

$|\delta^2|=|\Delta|$

$\Leftrightarrow x^2+y^2=\sqrt{(-35)^2+(-12)^2}$
$=\sqrt{1369}$
$=37$

Résolvons le système : $\begin{cases} x^2-y^2=-35 & (1) \\ xy=-6 & (2) \\ x^2+y^2=37 & (3) \end{cases}$

$(1)+(3)$: $x^2=1 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$

$(3)-(1)$: $y^2=36 \Leftrightarrow y=6$ ou $y=-6$

Comme $xy = -6 < 0$, x et y ont des signes contraires

<u>Donc</u> : $\delta_1 = 1 - 6i$; $\delta_2 = -1 + 6i$ et alors $\Delta = (1 - 6i)^2$

$$z_1 = \frac{3 + 4i + 1 - 6i}{2} = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i$$

$$z_2 = \frac{3 + 4i - 1 + 6i}{2} = \frac{2 + 10i}{2} = 1 + 5i$$

$$S_{\mathbb{C}} = \{-2i \,;\, 2 - i \,;\, 1 + 5i\}$$

Question 3 $\begin{cases} mx - y + z = m \\ -x + 2y + mz = 2 \\ -x - y - mz = -1 \end{cases}$

$$\text{dét } A = \begin{vmatrix} m & -1 & 1 \\ -1 & 2 & m \\ -1 & -1 & -m \end{vmatrix} = m\cdot(-2m+m) + 1\cdot(m+m) + 1\cdot(1+2)$$
$$= -m^2 + 2m + 3$$
$$= -(m^2 - 2m - 3)$$
$$= -(m+1)\cdot(m-3)$$

1er cas : dét $A \neq 0$: $m \neq -1$ et $m \neq 3$ Système à sol. unique

$$\text{dét } A_x = \begin{vmatrix} m & -1 & 1 \\ 2 & 2 & m \\ -1 & -1 & -m \end{vmatrix} = m\cdot(-2m+m) + 1\cdot(-2m+m) + 1\cdot(-2+2)$$
$$= -m^2 - m$$
$$= -m\cdot(m+1)$$

$$\text{dét } A_y = \begin{vmatrix} m & m & 1 \\ -1 & 2 & m \\ -1 & -1 & -m \end{vmatrix} = m\cdot(-2m+m) + 1\cdot(-m^2+1) - 1\cdot(m^2-2)$$
$$= -m^2 - m^2 + 1 - m^2 + 2$$
$$= -3m^2 + 3$$
$$= -3\cdot(m-1)\cdot(m+1)$$

$$\text{dét } A_z = \begin{vmatrix} m & -1 & m \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = m\cdot(-2+2) + 1\cdot(1+m) - 1\cdot(-2-2m)$$
$$= 1 + m + 2 + 2m$$
$$= 3m + 3 = 3\cdot(m+1)$$

$$x = \frac{\text{dét } A_x}{\text{dét } A} = -\frac{m(m+1)}{-(m+1)(m-3)} = \frac{m}{m-3}$$

$$y = \frac{-3(m-1)}{-(m-3)} = \frac{3(m-1)}{m-3}$$

$$z = -\frac{3}{m-3}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{m}{m-3} ; \frac{3m-3}{m-3} ; -\frac{3}{m-3} \right), m \in \mathbb{R} \right\}$$

Trois plans se coupent en un point $I\left(\frac{m}{m-3} ; \frac{3m-3}{m-3} ; -\frac{3}{m-3}\right)$

cas : $\det A = 0$: $\boxed{m = -1}$

$$\left\{\begin{array}{l} -x - y + z = -1 \\ -x + 2y - z = 2 \\ -x - y + z = -1 \end{array}\right] = \quad \text{Système simplement indéterminé}$$

Le système se ramène à un système de 2 éq. à 3 inconnues

Soit $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$: $\left\{\begin{array}{l} -x - y + \alpha = -1 \\ -x + 2y - \alpha = 2 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \cdot(+1) \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y - \alpha = 1 \\ 3y - 2\alpha = 3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y - \alpha = 1 \\ y = 1 + \frac{2}{3}\alpha \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 - 1 - \frac{2}{3}\alpha + \alpha \\ y = 1 + \frac{2}{3}\alpha \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{3}\alpha \\ y = 1 + \frac{2}{3}\alpha \end{array}\right.$$

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{3}\alpha ; 1 + \frac{2}{3}\alpha ; \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Les trois plans se coupent suivant une droite d passant par le point $A(0;1;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\det A = 0$: $\boxed{m = 3}$ $\left\{\begin{array}{l} 3x - y + z = 3 \\ -x + 2y + 3z = 2 \\ -x - y - 3z = -1 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1) \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + 3z = 1 \\ -x + 2y + 3z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 1 \\ \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \cdot(-3) \\ \\ \cdot 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + 3z = 1 \\ 3y + 6z = 3 \\ -4y - 8z = 0 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \\ :3 \\ :(-4) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + 3z = 1 \\ y + 2z = 1 \\ y + 2z = 0 \end{array}\right] \ddagger \quad \text{impossible} \quad S = \emptyset$$

Les 3 plans n'ont pas de point commun

Question 4 1. $(AB) \equiv \begin{cases} x = 5 - k \\ y = -3 + 2k \\ z = k \end{cases}, \; k \in \mathbb{R}$

$\vec{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\\2\end{pmatrix}$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

2. $(AB) \cap \Pi$ $\begin{cases} x = 5 - k & (1) \\ y = -3 + 2k & (2) \\ z = k & (3) \\ 4x - y + 2z - 3 = 0 & (4) \end{cases}$

(1), (2), (3) dans (4) : $20 - 4k + 3 - 2k + 2k - 3 = 0$

$\Leftrightarrow -4k + 20 = 0$

3

$\Leftrightarrow k = 5$

Donc : $(AB) \cap \Pi = \{ I(0; 7; 5) \}$ la droite (AB) perce le plan Π en I

3. Vecteur normal $\vec{n}$ à Π : $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}$ est vect. dir. de Π'

$M(x; y; z) \in \Pi' \Leftrightarrow \vec{AM}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{n}$

$\Leftrightarrow \det(\vec{AM}, \vec{u}, \vec{n}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-7 & -1 & 4 \\ y+7 & 2 & -1 \\ z+2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (x-7).(4+1) - (y+7)(-2-4) + (z+2).(1-8) = 0$

4

$\Leftrightarrow 5x - 35 + 6y + 42 - 7z - 14 = 0$

$\Leftrightarrow 5x + 6y - 7z - 7 = 0$

Donc : $\Pi' \equiv 5x + 6y - 7z - 7 = 0$

4. $\Pi \cap \Pi' \equiv \begin{cases} 4x - y + 2z - 3 = 0 & (1) \\ 5x + 6y - 7z - 7 = 0 & (2) \end{cases}$

Choisissons $x = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} y - 2z = 4\alpha - 3 & | \cdot (-6) \\ 6y - 7z = 7\alpha + 7 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 2z = 4\alpha - 3 \\ 5z = -17\alpha + 25 \quad | :5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2z + 4\alpha - 3 \\ z = -\frac{17}{5}\alpha + 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{34}{5}\alpha + 10 + 4\alpha - 3 \\ z = 5 - \frac{17}{5}\alpha \end{cases}$$

4. $$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - \frac{14}{5}\alpha \\ z = 5 - \frac{17}{5}\alpha \end{cases} \qquad S = \left\{ \left(\alpha ; 7 - \frac{14}{5}\alpha ; 5 - \frac{17}{5}\alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

<u>Donc</u> : Les deux plans Π et Π' se coupent suivant une droite d' passant par $D(0;7;5)$ et de vecteur directeur $\vec{u}'\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{14}{5} \\ -\frac{17}{5} \end{pmatrix}$

5. $C(3;4;-1) \in d'$?

$$d' \equiv \begin{cases} x = k \\ y = 7 - \frac{14}{5}k \\ z = 5 - \frac{17}{5}k \end{cases}, \ k \in \mathbb{R}$$

$$C \in d' \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = k \\ 4 = 7 - \frac{14}{5}k \\ -1 = 5 - \frac{17}{5}k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ 4 = 7 - \frac{14}{5} \cdot 3 \\ -1 = 5 - \frac{17}{5} \cdot 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ -3 = -\frac{42}{5} \\ -6 = -\frac{51}{5} \end{cases} \quad \text{impossible}$$

<u>Donc</u> : $C \notin d'$