Question 1

1.) Résoudre $z^3+(7i-3)z^2-(10+18i)z+24+8i=0$ (E)

sachant qu'elle admet une racine réelle.

$z=a$ $(a\in\mathbb{R})$ est solution de (E) $\Leftrightarrow a^3+(7i-3)a^2-(10+18i)a+24+8i=0$

$\Leftrightarrow a^3+7a^2i-3a^2-10a-18ai+24+8i=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3-3a^2-10a+24=0 & (1) \\ 7a^2-18a+8=0 & (2) \end{cases}$

(4p)

(2) : $7a^2+18a+8=0$ $\quad \Delta=18^2-4\cdot7\cdot8=100$, $\sqrt{\Delta}=10$

$a_1=\dfrac{18+10}{14}=2$ $\quad a_2=\dfrac{18-10}{14}=\dfrac{4}{7}$

si $a=2$, (1) est vérifiée

Donc la solution réelle est $z=2$

	1	$7i-3$	$-10-18i$	$24+8i$
2		2	$-2+14i$	$-24-8i$
	1	$7i-1$	$-12-4i$	0

(E) $\Leftrightarrow (z-2)\cdot(z^2+(7i-1)z+(-12-4i))=0$

Résolvons $z^2+(7i-1)z+(-12-4i)=0$ (E')

$\Delta=(7i-1)^2-4\cdot(-12-4i)=-49-14i+1+48+16i=2i$

(8p)

soit $x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ les racines carrées complexes de Δ

$\begin{cases} x^2-y^2=0 & (3) \\ x^2+y^2=2 & (4) \\ 2xy=2 & (5) \end{cases}$ $\quad$ (3)+(4) : $2x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm1$

(4)−(3) : $2y^2=2 \Leftrightarrow y=\pm1$

de (5) : x et y sont de même signe

les racines carrées complexes de Δ : $1+i$ et $-1-i$

les solutions de (E') : $\dfrac{-7i+1+1+i}{2}=1-3i$

$\dfrac{-7i+1-1-i}{2}=-4i$

Solutions de (E) $\quad S=\{2,-4i,1-3i\}$

2.) $z_1=\dfrac{3+7i}{2-5i}=\dfrac{3+7i}{2-5i}\cdot\dfrac{2+5i}{2+5i}=\dfrac{6+15i+14i-35}{4+25}=\dfrac{-29+29i}{29}=-1+i$ (f.a.)

$z_1=-1+i$ $\quad |z_1|=\sqrt{2}$

(3p)

$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi_1=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\varphi_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\}\ \varphi_1=\dfrac{3\pi}{4}\ (2\pi)$

$z_1=\sqrt{2}\cdot\operatorname{cis}\dfrac{3\pi}{4}$ (f.t.)

$z_2=-\dfrac{1}{8}\cdot(\sqrt{3}-i)=-\dfrac{\sqrt{3}}{8}+\dfrac{1}{8}i$ $\quad |z_2|=\sqrt{\dfrac{3}{64}+\dfrac{1}{64}}=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$

(2p)

$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{8}\cdot\dfrac{4}{1}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\varphi_2=\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{4}{1}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\ \varphi_2=\dfrac{5\pi}{6}\ (2\pi)$

$z_2=\dfrac{1}{4}\operatorname{cis}\dfrac{5\pi}{6}$ (f.t)

(2p) $Z = \frac{(z_1)^4}{(z_2)^3} = \frac{\left(\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\frac{3\pi}{4}\right)^4}{\left(\frac{1}{4}\,\mathrm{cis}\frac{5\pi}{6}\right)^3} = \frac{4\,\mathrm{cis}\,3\pi}{\frac{1}{64}\,\mathrm{cis}\frac{5\pi}{2}} = 4\cdot 64\cdot \mathrm{cis}\left(3\pi - \frac{5\pi}{2}\right) = 256\,\mathrm{cis}\frac{\pi}{2}$ (f.a.)

(1p) $Z = 256\,\mathrm{cis}\frac{\pi}{2} = 256\,i$ (f.a.)

Question 2

1.) $(\sqrt{2}\,x^2 - \frac{1}{2x})^{18} = \sum_{p=0}^{18} C_{18}^{p}\,(\sqrt{2}\,x^2)^{18-p}(-\frac{1}{2x})^{p}$

(5p) le degré est 12 $\Leftrightarrow 2(18-p)-p=12 \Leftrightarrow 36-2p-p=12 \Leftrightarrow 3p=24 \Leftrightarrow p=8$

le terme en x^{12} s'obtient pour $p=8$:

$C_{18}^{8}\,(\sqrt{2}\,x^2)^{10}\cdot(-\frac{1}{2x})^{8} = 43'758\cdot 2^5\,x^{20}\cdot\frac{1}{2^8 x^8} = \frac{43'758}{8}\,x^{12} = \frac{21'879}{4}\,x^{12}$

2.) tirage simultané de 4 parmi 32 cartes,

ordre ne joue pas de rôle : on utilise les combinaisons

a.) P(2 piques, 1 trèfle, 1 coeur)

(3p) $= \frac{C_8^2\cdot C_8^1\cdot C_8^1}{C_{32}^4} = \frac{28\cdot 8\cdot 8}{35'960} = \frac{1792}{35'960} \simeq 0{,}0498$

b.) P(2 coeurs)

(3p) $= \frac{C_8^2\cdot C_{24}^2}{C_{32}^4} = \frac{28\cdot 276}{35'960} = \frac{7728}{35'960} \simeq 0{,}2149$

c.) P(au moins 1 carreau) = 1 − P(aucun carreau)

(3p) $= 1-\frac{C_{24}^4}{C_{32}^4} = 1-\frac{10626}{35'960} = \frac{25'334}{35'960} \simeq 0{,}7045$

3.) On considère les 9 chiffres distincts de 0 et on forme des codes numériques de 6 chiffres distincts : tirage successif sans remise, ordre joue rôle : on utilise les arrangements sans répétition.

a.) 7 _ _ _ _ $\underbrace{\_}_{\text{chiffre impair (1,3,5 ou 9)}}$

(3p) $\underbrace{4}_{\text{le dernier chiffre est impair}} \cdot \underbrace{A_7^4}_{\text{choisi 4 chiffres parmi les 9-2=7 qui restent}} = 4\cdot 840 = 3360$

b.) $\underbrace{4}_{\text{il y a 4 possibilités pour mettre le groupe 1,2,3}} \cdot \underbrace{3!}_{\text{permutations des 3 chiffres}} \cdot \underbrace{A_6^3}_{\text{choisi 3 chiffres parmi les 6 qui restent}}$

(3p)

$= 4\cdot 6\cdot 120 = 2880$

Question 3

1) $(S)\begin{cases}(m+2)x+2y+3z=-3\\ -2x+(m-2)y+z=1\\ 2x+2y+z=-2\end{cases}$

$$\det A=\begin{vmatrix}m+2 & 2 & 3\\ -2 & m-2 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}m+2 & 2\\ -2 & m-2\\ 2 & 2\end{matrix}$$

$$=m^2\cancel{-4}\cancel{+4}-12-6(m-2)-2(m+2)+4$$

$$=m^2\cancel{-12}-6m\cancel{+12}-2m\cancel{-4}\cancel{+4}$$

$$=m^2-8m$$

$$=m(m-8)$$

(8p) si $\det A\neq 0 \Leftrightarrow \boxed{m\neq 0 \text{ et } m\neq 8}$, (S) admet une solution unique

$$\det A_1=\begin{vmatrix}-3 & 2 & 3\\ 1 & m-2 & 1\\ -2 & 2 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}-3 & 2\\ 1 & m-2\\ -2 & 2\end{matrix}=-3(m-2)-4+6+6(m-2)+6-2$$

$$=-3m+6-4+6+6m-12+4=3m$$

$$\det A_2=\begin{vmatrix}m+2 & -3 & 3\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}m+2 & -3\\ -2 & 1\\ 2 & -2\end{matrix}=m+2-6+12-6+2(m+2)-6$$

$$=m+2-6+12-6+2m+4-6=3m$$

$$\det A_3=\begin{vmatrix}m+2 & 2 & -3\\ -2 & m-2 & 1\\ 2 & 2 & -2\end{vmatrix}\begin{matrix}m+2 & 2\\ -2 & m-2\\ 2 & 2\end{matrix}=(m^2-4)(-2)+4+12+6(m-2)-2(m+2)-$$

$$=-2m^2\cancel{+8}\cancel{+4}\cancel{+12}+6m\cancel{-12}-2m\cancel{-4}\cancel{-8}=-2m^2+4m$$

Ainsi $x=\frac{3}{m-8}$, $y=\frac{3}{m-8}$, $z=\frac{-2m+4}{m-8}$ $\quad S=\left\{\left(\frac{3}{m-8},\frac{3}{m-8},\frac{-2m+4}{m-8}\right)\right\}$

Les 3 équations du système sont celles de 3 plans qui se coupent en un point $A\left(\frac{3}{m-8},\frac{3}{m-8},\frac{-2m+4}{m-8}\right)$

si $\boxed{m=0}$: $\begin{cases}2x+2y+3z=-3\\ -2x-2y+z=1\\ 2x+2y+z=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix}(E_2)\\(E_3)\end{matrix}\left|\begin{matrix}(E_2)+(E_1)\\(E_3)-(E_1)\end{matrix}\right. \begin{cases}2x+2y+3z=-3\\ 4z=-2\\ -2z=1\end{cases}$

(6p) $\Leftrightarrow \begin{cases}2x+2y+3z=-3\\ z=-\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+2y=-\frac{3}{2}\\ z=-\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\frac{3}{4}-y\\ z=-\frac{1}{2}\end{cases}$

$S=\left\{\left(-\frac{3}{4}-y,y,-\frac{1}{2}\right) \mid y\in\mathbb{R}\right\}$ Les 3 équations du système sont celles de 3 plans sécants en une droite passant par le point $B\left(-\frac{3}{4},0,-\frac{1}{2}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

si $\boxed{m=8}$: $\begin{cases}10x+2y+3z=-3\\ -2x+6y+z=1\\ 2x+2y+z=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix}(E_2)\\(E_3)\end{matrix}\left|\begin{matrix}5\cdot(E_2)+(E_1)\\(E_3)+(E_2)\end{matrix}\right. \begin{cases}10x+2y+3z=-3\\ 32y+8z=2\\ 8y+2z=-1\end{cases}$

(3p) $\Leftrightarrow \begin{cases}10x+2y+3z=-3\\ 8y+2z=\frac{1}{2}\\ 8y+2z=-1\end{cases}$ impossible $\quad S=\emptyset$

Les 3 équations sont celles de 3 plans sans points communs.

2.) $M(x, y, z) \in \pi$

$\Leftrightarrow \exists r, s \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AM} = r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$

(3p)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = r\,(3-2) + s\,(1-2) \\ y+1 = r\,(-1+1) + s\,(2+1) \\ z-2 = r\,(3-2) + s\,(2-2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = r - s \\ y+1 = 3s \\ z-2 = r \end{cases}$$ éq. paramétriques