CORRIGÉ

I) a) $z^3-(5+2i)z^2+(11+5i)z-12i=0$ (*) $\iff f(z)=0$

4p.

1) $z_0=bi$ ($b\in\mathbb{R}$) est solution de (*)

$\iff (bi)^3-(5+2i)(bi)^2+(11+5i)(bi)-12i=0$

$\iff (5b^2-5b)+i(-b^3+2b^2+11b-12)=0$

$\iff \begin{cases} 5b^2-5b=0 \quad (1) \\ \text{et } -b^3+2b^2+11b-12=0 \quad (2) \end{cases}$ $\Rightarrow \underbrace{b=0}_{\text{ne vérifie pas (2)}}$ ou $\underbrace{b=1}_{\text{vérifie (2)}}$

Ainsi $\boxed{z_0=i}$

2) a) $\Rightarrow$ $f(z)$ est divisible par $z-i$

HORNER	1	$-5-2i$	$11+5i$	$-12i$
i		i	$1-5i$	$12i$
	1	$-5-i$	12	0

d'où (*) $\iff (z-i)\left(z^2-(5+i)z+12\right)=0$

$\iff z=i$ ou $z^2-(5+i)z+12=0$

8p.

$\Delta=-24+10i=\delta^2=(x+iy)^2$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-24 \\ xy=5 \\ x^2+y^2=\sqrt{676}=26 \end{cases}$

$\Rightarrow x^2=1$ et $y^2=25$ et $xy=5$

$\Rightarrow \Delta=\delta^2=(1+5i)^2$

$\Rightarrow z=3+3i$ ou $z=2-2i$

d'où $\boxed{S=\{i,\ 3+3i,\ 2-2i\}}$

b) 1) $Z=z_1\cdot z_2=(-2+2i)\cdot(\sqrt{3}-3i)=\underline{\underline{6-2\sqrt{3}+i(6+2\sqrt{3})}}$ f. algébrique

or $z_1=-2+2i$, donc $|z_1|=2\sqrt{2}$ et $\begin{cases}\cos\theta_1=\frac{-\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ d'où $\theta_1=\frac{3\pi}{4}$ (mod 2π) et $z_1=2\sqrt{2}\cdot\text{cis}\,\frac{3\pi}{4}$

$z_2=\sqrt{3}-3i$, donc $|z_2|=2\sqrt{3}$ et $\begin{cases}\cos\theta_2=\frac{1}{2}\\ \sin\theta_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ d'où $\theta_2=\frac{-\pi}{3}$ (mod 2π) et $z_2=2\sqrt{3}\cdot\text{cis}\,\frac{-\pi}{3}$

d'où $Z=z_1\cdot z_2=\left(2\sqrt{2}\ \text{cis}\,\frac{3\pi}{4}\right)\left(2\sqrt{3}\cdot\text{cis}\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)=4\sqrt{6}\cdot\text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)=4\sqrt{6}\ \text{cis}\,\frac{5\pi}{12}$

5p.

donc $\underline{\underline{Z=4\sqrt{6}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)}}$ f. trigonométrique

2) En identifiant les formes trigonométrique et algébrique de Z, on trouve: $\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{6-2\sqrt{3}}{4\sqrt{6}}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{6+2\sqrt{3}}{4\sqrt{6}}$

3p.

soit $\boxed{\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$ et $\boxed{\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

20 points

II a) $\begin{cases} x+y+z=6 & (1)\\ 2x-y=0 & (2)\\ x-z=-2 & (3)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\\-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow A\cdot X = B \quad (*)$

Méthode au choix des candidats!

$\det A = \det\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix} = 4 \neq 0$, donc A est inversible

$${}^tA = \begin{pmatrix}1&2&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&+1&1\\2&-2&2\\1&1&-3\end{pmatrix}$$

d'où $(*) \Rightarrow X = A^{-1}B \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-2&2\\1&1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\0\\-2\end{pmatrix}$

(9 points)

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=2\\z=3\end{cases}$ donc $\boxed{S=\{(1,2,3)\}}$

La solution du système est un triplet, qui sont les coordonnés du point d'intersection des 3 plans d'équations (1), (2) et (3).

b) $\det A = \det\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\3&0&1\end{vmatrix} = 0$ donc A n'est pas inversible

et la méthode matricielle ne s'applique pas.

Méthode de GAUSS:

$\begin{cases}x+y+z=1 & (1)\\2x-y=1 & (2)\\3x+z=2 & (3)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y+z=1\\ (1)+(2): 3x+z=2\\ (3x+z=2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y+x+z=1\\ +3x+z=2\\ z=z \text{ param.}\end{cases}$

(9 points)

d'où $z=z$ (param.) $\Rightarrow x=-\frac{1}{3}z+\frac{2}{3} \Rightarrow y=-\frac{2}{3}z+\frac{1}{3}$

et $S_m = \left\{\left(-\frac{1}{3}z+\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}z+\frac{1}{3}, z\right), z\in\mathbb{R}\right\}$

Les solutions du système sont les coordonnées des points d'une droite, intersection des 3 plans donnés par les éq. (1) (2) (3).

(Cette droite passe par le point $M(+\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ et admet comme vecteur directeur $\vec{v}(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1)$)

c) <u>impossible</u> car si (a,b,c) et (a',b',c') sont des solutions, tout point de la droite AB a des coord. qui sont sol. du système, avec $A(a,b,c)$ et $B(a',b',c')$

(2 points)

20 points

III a) 6 jetons $\begin{cases} 2 \text{ Rouges } (N^o\ 1, 2) \\ 3 \text{ Bleus } (N^o\ 1, 2, 3) \\ 1 \text{ Blanc } (N^o\ 0) \end{cases}$

1) $P(2\text{ j. de couleurs différentes}) = 1 - P(2\text{ j. de même couleur})$

$= 1 - [P(2\text{ j. rouges}) + P(2\text{ j. bleus}) + P(2\text{ j. blancs})]$

$= 1 - \left[\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5} + \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5} + 0\right]$

(3·3 = 9 points)

$= 1 - \frac{4}{15}$

d'où $\boxed{P(2\text{ j. de couleurs différentes}) = \frac{11}{15}}$

2) $\boxed{P(2\text{ j. de } N^o \text{ impairs}) = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}}$

3) $P(2\text{ j. de somme } 3)$ → or : $\Sigma = 3$ → (Rouge 1, Bleu 2)

(Rouge 1, Rouge 2)

(Bleu 3, Blanc 0)

(Rouge 2, Bleu 1)

(Bleu 2, Bleu 1)

5 cas favorables sur les $C_6^2 = 15$ possibles.

$= \frac{5}{15}$

donc $\boxed{P(2\text{ j. de somme } 3) = \frac{1}{3}}$

b) Hommes disponibles : 10. Femmes disponibles $7 - 2 = 5$.

Comme il faut au moins 3 hommes et 2 femmes il y a 2 possibilités :

3 h. et 3 f.	ou 4 h. et 2 f.
Nombre de comités possibles :	Nombre de comités possibles
$C_{10}^3 \cdot C_5^3 = 1200$	$C_{10}^4 \cdot C_5^2 = 2100$

(6 points)

Le comité peut donc être formé de $1200 + 2100 = \boxed{3300 \text{ façons.}}$

c) $\left(9a^2 - \frac{1}{3a}\right)^{15} = \sum_{p=0}^{15} C_{15}^p (9a^2)^{15-p}\cdot\left(\frac{-1}{3a}\right)^p = \sum_{p=0}^{15} (-1)^p C_{15}^p \cdot 3^{30-3p}\, a^{30-3p}$

terme en a^9 : condition : $30 - 3p = 9$ d'où $\underline{\underline{p = 7}}$

(5 points)

Le terme en a^9 est donc $(-1)^7 \cdot C_{15}^7 \cdot 3^{30-21}\cdot a^{30-21} = \boxed{-C_{15}^7 \cdot 3^9 \cdot a^9}$

$\boxed{= -126\,660\,105\ a^9}$

20 points