Corrigé

1. a) $p(z) = iz^3 + (1-6i)z^2 + (14+2i)z + (30-12i) = 0$

   $p(z)$ admet une racine imaginaire pure si et seulement si $\exists b \in \mathbb{R}$ tel que $p(bi) = 0$

   On a: $\forall b \in \mathbb{R} \quad p(bi) = 0 \Leftrightarrow$

$$
\begin{aligned}
& i(ib)^3 + (1-6i)(ib)^2 + (14+2i)(ib) + (30-12i) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & b^3 - b^2 + 6ib^2 - 2b + 14ib + 30 - 12i = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(b^3 - b^2 - 2b + 30\right) + i\left(6b^2 + 14b - 12\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} b^3 - b^2 - 2b + 30 = 0 \\ 6b^2 + 14b - 12 = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} b^3 - b^2 - 2b + 30 = 0 \\ b = -3 \text{ ou } b = \frac{2}{3} \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & b = -3
\end{aligned}
$$

   donc $z_0 = -3i$ est une racine imaginaire pure de $p(z)$

   En utilisant le schéma de Horner, on trouve

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad p(z) = (z+3i)\left[iz^2 + (4-6i)z - (4+10i)\right]$$

   Posons $Q(z) = iz^2 + (4-6i)z - (4+10i)$ et résolvons l'équation $Q(z) = 0$

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad iz^2 + (4-6i)z - (4+10i) = 0$$

$$\Delta = (4-6i)^2 + 4i(4+10i) = -60 - 32i$$

   Déterminons les racines carrées complexes de Δ

   Déterminons $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = -60 - 32i$.

   Posons $z = x + iy \qquad (x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R})$.

   Comme $|-60 - 32i| = \sqrt{60^2 + 32^2} = 68$, on a

$$z^2 = -60 - 32i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -60 \\ 2xy = -32 \text{ (s.c.)} \\ x^2 + y^2 = 68 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ 2xy = -32 \\ y^2 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ ou } x = -2 \\ 2xy = -32 \\ y = 8 \text{ ou } y = -8 \end{cases}$$

   Donc, les racines carrées complexes de Δ sont: $2-8i$ et $-2+8i$.

   Donc $Q(z) = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{-4+6i+2-8i}{2i} = -1+i$ ou $z = \dfrac{-4+6i-2+8i}{2i} = 7+3i$

   Finalement $p(z) = 0 \Leftrightarrow z = -3i$ ou $z = -1+i$ ou $z = 7+3i$

$$\boxed{S = \{-3i; -1+i; 7+3i\}}$$

   b) $z = -3i = 3cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

   $z = -1 + i = \sqrt{2}cis\frac{3\pi}{4}$

   $z = 7 + 3i = \sqrt{58}cis0.4$

2. $(s)\begin{cases} mx + y + z = 1 & (E_1) \\ x + my + z = m & (E_2) \\ x + y + mz = m & (E_3) \end{cases}$

   $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \qquad \det A = m^3 - 3m + 2 = (m+2)(m-1)^2$

1er cas : $\boxed{m \neq -2 \text{ et } m \neq 1}$

   Dans ce cas, le système est un système de Cramer et admet donc une solution unique.

MATHÉ I

C1 D

$$(s) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m & 1 \\ m & 1 & m \end{vmatrix}}{(m+2)(m-1)^2} = \dfrac{-(m-1)^2}{(m+2)(m-1)^2} = -\dfrac{1}{m+2} \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m & m \end{vmatrix}}{(m+2)(m-1)^2} = \dfrac{(m+1)(m-1)^2}{(m+2)(m-1)^2} = \dfrac{m+1}{m+2} \\ z = \dfrac{\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}}{(m+2)(m-1)^2} = \dfrac{(m+1)(m-1)^2}{(m+2)(m-1)^2} = \dfrac{m+1}{m+2} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(-\frac{1}{m+2}; \frac{m+1}{m+2}; \frac{m+1}{m+2} \right) \right\}$$

Dans l'espace muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, les trois plans d'équations (E_1) ; (E_2) et (E_3) ont un seul point commun, à savoir le point $A\left(-\frac{1}{m+2}; \frac{m+1}{m+2}; \frac{m+1}{m+2} \right)$.

2e cas : $\boxed{m = 1}$

Dans ce cas, le système s'écrit :

$$(s) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x + y + z = 1 \Leftrightarrow x = 1 - y - z$$

Donc : $S = \{(1 - y - z; y; z) \mid y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$

Dans ce cas, les trois plans sont confondus.

3e cas : $\boxed{m = -2}$

Dans ce cas, le système s'écrit :

$$(s) \begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ x + y - 2z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow (s) \begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ 0x + 0y + 0z = -3 \quad (E_1) + (E_2) + (E_3) \quad \text{impossible} \end{cases}$$

Donc : $S = \phi$

Dans ce cas, les trois plans n'ont aucun point commun.

3. a. i. $6^3 = 216$

ii. $A_6^3 = 120$

b. i. A : obtenir exactement 2 rois

B : obtenir exactement 3 piques

$A \cap B$: obtenir exactement 2 rois et 3 piques

$$P(A \cap B) = \frac{C_3^2 C_7^3 C_{21}^1 + C_1^1 C_3^1 C_7^2 C_{21}^2}{C_{32}^6} = \frac{3 \cdot 32 \cdot 21 + 1 \cdot 3 \cdot 21 \cdot 210}{906\,192} = \frac{121}{7\,192} = 0.016$$

ii. $P(A) = \dfrac{C_4^2 C_{28}^4}{C_{32}^6} = \dfrac{6 \cdot 20\,475}{906\,192} = \dfrac{975}{7\,192} = 0.135$

$$P(B) = \frac{C_8^3 C_{24}^3}{C_{32}^6} = \frac{56 \cdot 2024}{906\,192} = \frac{1\,012}{8\,091} = 0.125$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{975}{7\,192} + \frac{1\,012}{8\,091} - \frac{121}{7\,192} = \frac{7\,891}{32\,364} = 0.243$$

c ~~b~~. $card\Omega = C_{25}^4 = 12650$

$P(A) = \dfrac{C_{16}^4 + C_9^4}{12650} = 0,15$ $\qquad P(B) = 1 - \dfrac{C_9^4}{12650} = 0,99$