Corrigé Math I, section C, juin 2009

Question 1

1) $z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$

$|z_1| = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi_1 = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\varphi_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} = -\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \end{array}\right\} \varphi_1 = -\frac{\pi}{6}$$

$\underline{z_1 = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

$z_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{1+2\sqrt{3}i-3}{1+3} = \frac{-2+2\sqrt{3}i}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$|z_2| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi_2 = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\varphi_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \end{array}\right\} \varphi_2 = \frac{2\pi}{3}$$

$\underline{z_2 = \text{cis}\,\frac{2\pi}{3}}$

$Z = \sqrt{2}^{13}\,\text{cis}\left(-\frac{13\pi}{6}\right) \text{cis}\,\frac{14\pi}{3} = 2^6\sqrt{2}\,\text{cis}\left(-\frac{13\pi}{6} + \frac{14\pi}{3}\right) = 64\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\cancel{15}^{5}\pi}{\cancel{6}_{2}}$

$$\begin{cases} Z = 64\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{2} & \text{(forme trigon.)} \\ Z = 64\sqrt{2}\,i & \text{(forme alg.)} \end{cases}$$

2) a) $z = 3-4i$, $|z| = \sqrt{9+16} = 5$

r.c.c. de z: $\begin{cases} u_1 = \sqrt{\frac{5+3}{2}} - i\sqrt{\frac{5-3}{2}} = 2-i \\ u_2 = -u_1 = -2+i \end{cases}$

b) Horner

	1	$-8i$	$-20+i$	$1+13i$
i		i	7	$-13i-1$
	1	$-7i$	$-13+i$	$\underline{\underline{0}}$

comme le reste de la division vaut 0, on a $P(i)=0$ et

$P(z)=0 \iff z=i$ ou $z^2 - 7iz - 13 + i = 0$

$\Delta = -49 + 52 - 4i = 3-4i$

r.c.c. de Δ: $\delta = 2-i$

$z_1 = \frac{7i+2-i}{2} = 1+3i$

$z_2 = \frac{7i-2+i}{2} = -1+4i$

$S = \{i; 1+3i; -1+4i\}$

Question 2

1) $\left(2x^3 - \frac{1}{3x}\right)^{12} = \sum_{n=0}^{12} C_{12}^{n} (2x^3)^{12-n}\left(-\frac{1}{3x}\right)^{n} = \sum_{n=0}^{12} C_{12}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} 2^{12-n}\, \underbrace{x^{36-3n} \cdot x^{-n}}_{x^{36-4n}}$

$36-4m=16 \Leftrightarrow 4m=20 \Leftrightarrow \underline{m=5}$

terme en x^{16} : $C_{12}^{5}\left(-\frac{1}{3^5}\right)2^7\, x^{16} = -\frac{11'264}{27}x^{16} \approx -417{,}185\,x^{16}$

2) $\Omega = \{$mains à 6 cartes$\}$, $\#\Omega = C_{32}^{6}$

a) A : obtenir exactement 2 piques et 1 trèfle

$\underbrace{8 \text{ piques}}\ \underbrace{8 \text{ trèfles}}\ \underbrace{16 \text{ autres}}$

$$p(A) = \frac{C_8^2 \cdot C_8^1 \cdot C_{16}^3}{C_{32}^6} = \frac{1120}{8091} \approx 0{,}06$$

b) B : obtenir 3 cartes rouges, 1 pique, 0 as

$\underbrace{14 \text{ rouges (sans as)}}\ \underbrace{7 \text{ piques (sans as)}}\ \underbrace{7 \text{ trèfles (sans as)}}\ \underbrace{4 \text{ as}}$

$$p(B) = \frac{C_{14}^3 \cdot C_7^1\, C_7^2}{C_{32}^6} = \frac{637}{10'788} \approx 0{,}06$$

3) a) $\underbrace{L}_{3 \text{ poss.}}\ \underbrace{C}_{9}\ \underbrace{C}_{9}\ \underbrace{C}_{9}\ \underbrace{C}_{9}$ poss.

nombre de codes possibles : $3 \cdot 9^4 = 19'683 \quad (=3 \cdot \bar{B}_9^4)$

b) $\underbrace{B}_{1}\ \underbrace{C}_{9}\ \underbrace{C}_{8}\ \underbrace{C}_{7}\ \underbrace{C}_{6}$ poss.

nombre de codes possibles : $1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = A_9^4 = 3'024$

c) nombre de codes ne comportant ni 7, ni 8, ni 9 :

$\underbrace{B}_{1}\ \underbrace{C}_{6}\ \underbrace{C}_{5}\ \underbrace{C}_{4}\ \underbrace{C}_{3}$ poss. $\qquad A_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

nombre de codes comportant au moins un des chiffres 7, 8 ou 9 : $3024 - 360 = 2'664$

Question 3

1) a)

$$\Delta = \begin{vmatrix} m-4 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -24(m-4)+27+6-12+9(m-4)-36 = -15m+45$$

Le système admet une solution unique ssi $\Delta \neq 0$

ssi $m \neq 3$

b) pour $m=3$ $\Delta = 0$ donc le système a 0 ou une infinité de solutions

$$\begin{cases} -x+3y-z=10 & (1)\\ 2x-4y+3z=-19 & (2)\\ 3x-3y+6z=-27 & (3)\ (\Leftrightarrow x-y+2z=-9)\end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow x = 3y-z-10 \quad (4)$

$\rightarrow (2):\ 6y-2z-20-4y+3z=-19 \Leftrightarrow 2y+z=1 \quad (5)$

$\rightarrow (3):\ 3y-z-10-y+2z=-9 \Leftrightarrow 2y+z=1 \Leftrightarrow z=1-2y \quad (5)$

$(5) \rightarrow (4):\ x = 3y-1+2y-10 = 5y-11$

D'où : $S=\{(5y-11,\ y,\ 1-2y) \mid y\in\mathbb{R}\}$

en posant $y=\alpha$ on voit que S est représenté par la droite d d'équations paramétriques :

$$d \equiv \begin{cases} x=5\alpha-11\\ y=\alpha\\ z=-2\alpha+1\end{cases} \quad (\alpha\in\mathbb{R}) \qquad A(-11,0,1)\in d,\ \vec{u}\begin{pmatrix}5\\1\\-2\end{pmatrix} = \text{vect. dir. de } d$$

2) a) $A(1,3,-1)\in d$, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ = v. dir. de d

b) comme $d' \parallel d$, $\vec{u}$ est également un v. dir. de d', d'où :

$M(x,y,z)\in d' \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}\ \overrightarrow{BM} = k\cdot\vec{u}$

$$\Leftrightarrow \text{———} \begin{cases} x=1+2k & (1)\\ y=\quad -k & (2)\\ z=2+k & (3)\end{cases}$$ (système d'éq. param. de d')

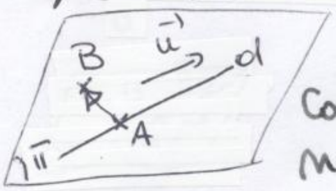
éliminons le paramètre k : $(2) \Leftrightarrow k=-y$

$(2)\rightarrow(1):\ x=1-2y \Leftrightarrow x+2y-1=0$

$(2)\rightarrow(3):\ z=2-y \Leftrightarrow y+z-2=0$

système d'éq. cartésiennes : $d' \equiv \begin{cases} x+2y-1=0\\ y+z-2=0\end{cases}$

c) $B\in d \Leftrightarrow \exists t \begin{cases}1=1+2t\\ 0=3-t\\ 2=-1+t\end{cases} \Leftrightarrow \exists t \begin{cases}t=0\\ t=3\\ t=3\end{cases}$ imposs. donc $B\notin d$



Comme $A\in d$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-3\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{u}$ sont deux vecteurs dir. non colinéaires de π, d'où :

$M(x,y,z)\in\pi \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \vec{u})=0$ (ou : $\det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AB}, \vec{u})=0$)

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 2\\ y-3 & -3 & -1\\ z+1 & 3 & 1\end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow \cancel{-3(x-1)}+6(y-3)+6(z+1)\cancel{+3(x-1)}=0 \quad |:6$

$\Leftrightarrow y-3+z+1=0$

$\Leftrightarrow \underline{y+z-2=0 \equiv \pi}$