Question I

1) $(3-2i)z^3 - 3i\,z^2 + (6+2i)z + (4-6i) = 0$

	$3-2i$	$-3i$	$6+2i$	$4-6i$
i		$2+3i$	$2i$	$-4+6i$
	$3-2i$	2	$6+4i$	0

donc i est une solution et l'équation est équivalente à :

$$(z-i)\left[(3-2i)z^2 + 2z + (6+4i)\right] = 0$$

$\Leftrightarrow$ $z = i$ ou $(3-2i)z^2 + 2z + (6+4i) = 0$

$$\Delta = 4 - 4\cdot(3-2i)(6+4i) = -100 = (10i)^2$$

$$z = \frac{-2+10i}{2(3-2i)} = \frac{(-1+5i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{-13+13i}{13} = -1+i$$

ou

$$z = \frac{-2-10i}{2\cdot(3-2i)} = \frac{(-1-5i)\cdot(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{7-17i}{13} = \frac{7}{13} - \frac{17}{13}i$$

$$S = \left\{ i \,;\, -1+i \,;\, \frac{7}{13} - \frac{17}{13}i \right\}$$

2) $z_1 = 2^2 \operatorname{cis}\frac{\pi}{12}$ $\qquad z_2 = \sqrt{3} - i = 2\cdot\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ $\qquad |z_2| = 2$

$\left.\begin{array}{l} \tan\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \varphi \text{ est dans le } 4^e \text{ quadrant} \end{array}\right\} \varphi = -\frac{\pi}{6} + k\cdot\pi$

$$Z = \frac{2^6\cdot\operatorname{cis}\frac{3\pi}{12}}{2\cdot\operatorname{cis}-\frac{\pi}{6}} = 2^5\cdot\frac{\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{cis}-\frac{\pi}{6}} = \underline{\underline{32\operatorname{cis}\frac{5\pi}{12}}}$$ (forme trigonométri

$$= \frac{2^6\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{3}-i} = \frac{32\cdot(\sqrt{2}+i\sqrt{2})}{\sqrt{3}-i}\cdot\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i}$$

$$= \frac{32\cdot\sqrt{2}\left[\sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1)\right]}{4} = \underline{\underline{8\sqrt{2}(\sqrt{3}-1) + i\,8\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}}$$

(forme algébrique)

Calculons les racines 5^{es} de Z:

$$z^5 = 32 \cdot \text{cis}\,\frac{5\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow r^5 \,\text{cis}\,(5\alpha) = 32\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ 5\alpha = \frac{5\pi}{12} + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \alpha = \frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{2\pi}{5} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow z = 2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{2\pi}{5}\right) \qquad k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

$$\begin{array}{|l} z_0 = 2\,\text{cis}\,\frac{\pi}{12} \\ z_1 = 2\,\text{cis}\,\frac{29\pi}{60} \\ z_2 = 2\,\text{cis}\,\frac{53\pi}{60} \\ z_3 = 2\,\text{cis}\,\frac{77\pi}{60} \\ z_4 = 2\,\text{cis}\,\frac{101\pi}{60} \end{array}$$

Question II

1) $(*) \begin{cases} mx + 4y + 2z = 6 \\ x - y + 2z = 1 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} m & 4 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$= -m + 8 + 4 + 2 - 4m - 4$

$= -5m + 10$

$m \in \mathbb{R} - \{2\}$: $\Delta \neq 0$ et le système admet une seule solution

2) $m = 2$

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y + 2z = 6 \\ x - y + 2z = 1 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$

Poser

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 3x + 5z = 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-5z+5}{3} + 2y + z = 3 \\ x = \frac{-5z+5}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6y - 2z = 4 \\ x = \frac{-5z+5}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{z+2}{3} \\ x = \frac{-5z+5}{3} \end{cases}$

Poser $z = \beta$:

$\begin{cases} x = \frac{-5\beta+5}{3} \\ y = \frac{\beta+2}{3} \\ z = \beta \end{cases} \quad \beta \in \mathbb{R}$

$S = \{(-\frac{5}{3}\beta + \frac{5}{3}; \frac{1}{3}\beta + \frac{2}{3}; \beta) \ \beta \in \mathbb{R}\}$

Interprétation géométrique

Si $m = 2$, $(*)$ est un système d'équations de plans de l'espace dont l'intersection est la droite passant par $A(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

2) a) $A(3; 1; 0) \in d$?

$\Leftrightarrow$ il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que

$\begin{cases} 3 = \beta + 2 & \Rightarrow \beta = 1 \\ 1 = -\beta - 1 & \Rightarrow \beta = -2 \\ 0 = 2\beta & \Rightarrow \beta = 0 \end{cases}$ impossible

Donc $A \notin d$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d donc aussi de d'.

$M(x;y;z) \in d'$

$\Leftrightarrow$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$\overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \vec{u}$

$\Leftrightarrow$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$\begin{cases} x-3 = \alpha \cdot 1 \\ y-1 = \alpha \cdot (-1) \\ z = \alpha \cdot 2 \end{cases}$ syst. d'éq. param. de d'

$\Leftrightarrow$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$\begin{cases} \alpha = x-3 \\ \alpha = -y+1 \\ \alpha = \frac{z}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = -y+1 \\ \text{et} \\ -y+1 = \frac{z}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 4 \\ z+2y = 2 \end{cases}$ syst. d'éq. cart. de d'

c) $B(2;-1;0) \in d$ $\quad C(3;-2;2) \in d$ $\quad A(3;1;0) \notin d$

A;B;C sont trois points non alignés car $A \notin d$.

$M(x;y;z) \in \pi$

$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 0 \\ y-1 & -2 & -3 \\ z & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} x-3 & -1 \\ y-1 & -2 \\ z & 0 \end{matrix} = 0$

$\Leftrightarrow -4\cdot(x-3)+3z+2(y-1) = 0$

$\Leftrightarrow -4x+2y+3z+10 = 0$

$\vec{n}\begin{pmatrix}-4\\2\\3\end{pmatrix}$

Question III

1) cas possibles : $C_{32}^{10} = \dfrac{32!}{22!\,10!} = 64\,512'240$

a) p (4 piques, 3 cœurs, 2 carreaux, 1 trèfle)

$$= \frac{C_8^4\ C_8^3\ C_8^2\ C_8^1}{C_{32}^{10}} = \frac{\frac{8!}{4!\,4!}\cdot\frac{8!}{5!\,3!}\ \frac{8!}{6!\,2!}\cdot 8}{64'512'240}$$

$$= \frac{878\ 080}{64'512'240} \simeq 1{,}36\,\%$$

b) p (au moins 1 cœur)

$= 1 - p$ (aucun cœur)

$$= 1 - \frac{C_{24}^{10}}{C_{32}^{10}} = 1 - \frac{1\,961'256}{64'512'240}$$

$\approx 96{,}96\,\%$

2) a) $9\cdot 8\cdot 7\ 6\cdot 5\cdot 4 = 60'480$

b) $C_6^2\ A_4^2\ A_5^4 = \dfrac{6!}{4!\,2!}\cdot\dfrac{4!}{2!}\ \dfrac{5!}{1!} = \dfrac{6\cdot 5}{\cancel{2}}\ 4\ 3\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot \cancel{2} = 21600$

autre méthode :

$C_4^2\ C_5^4\ 6! = \dfrac{4!}{2!\,2!}\ \dfrac{5!}{4!\,1!}\cdot 6! = 21600$

3)

nombre de points	6	5	4	3	2	1
gain X :	6	1	$-1{,}5$	1	$-1{,}5$	1
probabilité :	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

loi de probabilité : $p(X=6) = \frac{1}{6}$

$p(X=1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$p(X=-1{,}5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$E(X) = \frac{1}{6}\cdot 6 + \frac{1}{2}\ 1 + \frac{1}{3}\cdot(-1{,}5)$

$= 1 + \frac{1}{2} - 0{,}5$

$= 1$ = gain moyen

$$V(X) = \frac{1}{6}(6-1)^2 + \frac{1}{2}(1-1)^2 + \frac{1}{3}(-1{,}5-1)^2$$

$$= \frac{25}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{25}{4}$$

$$= \frac{75}{12}$$

$$= \frac{25}{4}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$