Corrigé mathématiques II, sections C et D, session 2015

Question 1 (3 + 5 + 5 = 13 points)

(1) voir manuel pages 56 et 57

(2) (a) $\log_3(2x-1)-\log_{\frac{1}{3}}(4-x)=\log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2x+2}\right) \qquad (E)$

C.E. : 1) $2x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$

2) $4-x>0 \Leftrightarrow x<4$ donc $D=\left]\frac{1}{2}\,;\,4\right[$

3) $2x+2>0 \Leftrightarrow x>-1$

$$(\forall x\in D)\quad (E) \quad \Leftrightarrow \log_3(2x-1)-\frac{\log_3(4-x)}{\log_3\left(\frac{1}{3}\right)}=\frac{\log_3\sqrt{2x+2}}{\log_3\left(\sqrt{3}\right)}$$
$$\Leftrightarrow \log_3(2x-1)+\log_3(4-x)=2\log_3\sqrt{2x+2}$$
$$\Leftrightarrow \log_3\left((2x-1)(4-x)\right)=\log_3(2x+2) \qquad |\exp_3$$
$$\Leftrightarrow (2x-1)(4-x)=2x+2$$
$$\Leftrightarrow 8x-2x^2-4+x=2x+2$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-7x+6=0$$
$$\Delta=49-48=1$$
$$x=\frac{7\pm1}{4}=\begin{cases}2\in D\\ \frac{3}{2}\in D\end{cases} \qquad \boxed{S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{3}{2};\,2\right\}}$$

(b) $3^{1-x}-3^{2+x}\le 6 \quad \Big|\cdot 3^x \qquad D=\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 3-3^{2+2x}\le 6\cdot 3^x$$
$$\Leftrightarrow 3-9\cdot 3^{2x}-6\cdot 3^x\le 0 \quad \Big|:(-3)$$
$$\Leftrightarrow 3\cdot 3^{2x}+2\cdot 3^x-1\ge 0 \qquad (I)$$

Posons $3^x=t$, donc $t>0$

L'inéquation s'écrit : $3t^2+2t-1\ge 0 \qquad \Delta=4+12=16 \;;\; t=\frac{-2\pm4}{6}=\begin{cases}\frac{1}{3}\\ -1\end{cases}$

t		-1		$\frac{1}{3}$	
$3t^2+2t-1$	$+$	0	$-$	0	$+$

D'où :

$$(I) \Leftrightarrow t \leq -1 \quad \text{ou} \quad t \geq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{3^x \leq -1}_{\text{impossible}} \quad \text{ou} \quad 3^x \geq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3^x \geq 3^{-1}$$

$$\Leftrightarrow x \geq -1$$

$$\boxed{S_{\mathbb{R}} = [-1;+\infty[}$$

Question 2 (7 + 3 + 7 + 2 = 19 points)

$$\boxed{f(x) = x + 2 + e^{\frac{x}{x+1}}}$$

(a) C.E. : $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ donc $dom\, f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \left(x + 2 + e^{\frac{\boxed{x}\to -1}{\boxed{x+1}\to 0}} \right)$$

On distingue deux cas :

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim_{x\to(-1)^-} \left(\underbrace{x+2}_{\to 1} + \underbrace{e^{\boxed{\frac{x}{x+1}}\to+\infty}}_{\to+\infty} \right) = +\infty$$ donc A.V. d'équation $y = -1$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} \left(\underbrace{x+2}_{\to 1} + \underbrace{e^{\boxed{\frac{x}{x+1}}\to-\infty}}_{\to 0} \right) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x+2+e^{\frac{\boxed{x}\to+\infty}{\boxed{x+1}\to+\infty}} \right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\underbrace{x+2}_{\to+\infty} + \underbrace{e^{\boxed{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}\to 1}}_{\to e} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\boxed{\frac{e^{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}}{x}}}_{\to 0} \right) = 1 = a$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} \left(2 + \underbrace{e^{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}}_{\to e} \right) = 2 + e = b$$

De même : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - x) = 2 + e$$

G_f admet donc une A.O. $\begin{pmatrix} D \\ G \end{pmatrix}$ d'équation $y = x + 2 + e$

(b) Position de G_f par rapport à l'A.O. :

On étudie le signe de $\varepsilon(x) = f(x) - (x+2+e) = e^{\frac{x}{x+1}} - e$

Posons $\varepsilon(x) > 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{x+1}} > e \quad |\ln$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{x+1} > 0$$

$$\Leftrightarrow x < -1$$

x		-1	
$\varepsilon(x)$	$+$	$\Vert$	$-$
	$G_f\,/\,A.O.$	$\Vert$	$A.O.\,/\,G_f$

(c) $dom\, f' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$f'(x) = 1 + e^{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{1\cdot(x+1) - x\cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$= 1 + \frac{1}{(x+1)^2}\, e^{\frac{x}{x+1}} > 0$$

pas d'extrémum ; f est croissante sur $dom f$

$dom\, f'' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$f''(x) = \frac{-2}{(x+1)^3}\, e^{\frac{x}{x+1}} + \frac{1}{(x+1)^2}\, e^{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{(x+1)^4} \cdot (-2x-2+1) \cdot e^{\frac{x}{x+1}}$$

$$= (-2x-1) \cdot \underbrace{\boxed{\frac{e^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^4}}}_{>0}$$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
G_f		$\cup$	$\Vert$	$\cup$	$P.I.$	$\cap$	

Comme $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{e} \approx 1{,}87$, point d'inflexion $I\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{2} + \frac{1}{e}\right)$

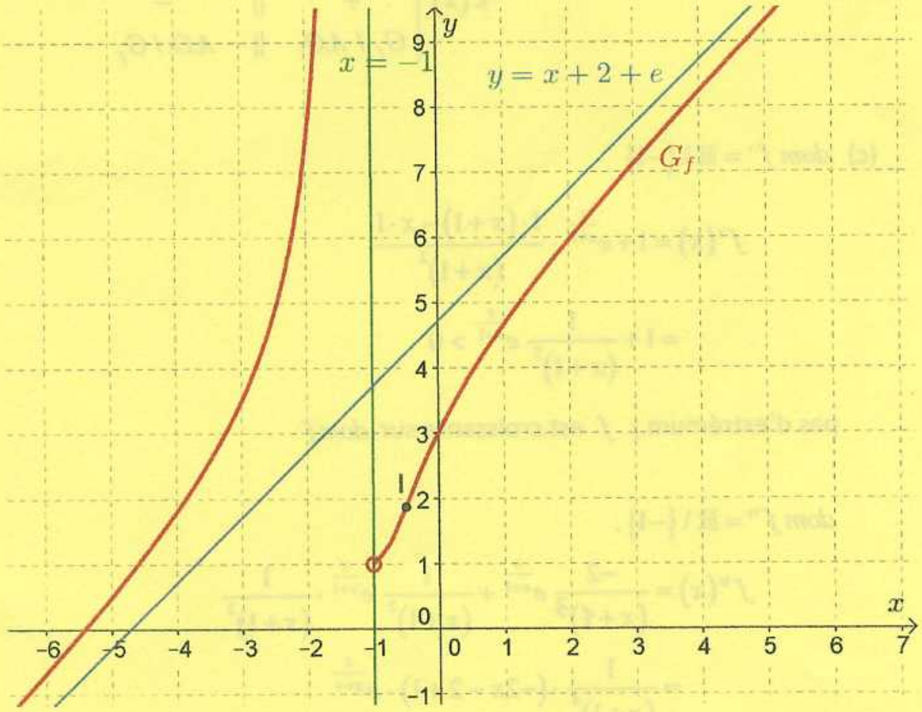
Tableau de variation complet :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \,\|\|\, 1$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}+\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

(d) Tableau de valeurs

x	-4	-3	-2	0	1	2
$f(x)$	$\approx 1{,}8$	$\approx 3{,}5$	$\approx 7{,}4$	3	$\approx 4{,}6$	$\approx 5{,}9$

Représentation graphique :



Question 3 (9 + 3 + 5 = 17 points)

$$\boxed{f(x)=\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}}$$

(a) C.E. : 1) $x \neq 0$

2) $x > 0$

$$\boxed{dom\, f=\left[\frac{1}{e};+\infty\right[}$$

3) $1+\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{e}$

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{e}} f(x) = f\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ pas d'A.V.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} \qquad f.i.\ \frac{\infty}{\infty}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\underbrace{\boxed{2x\sqrt{1+\ln x}}}_{\to+\infty}} = 0$$

A.H.D. d'équation $y = 0$

$$dom\, f' = \left]\frac{1}{e}\,;+\infty\right[$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2x\sqrt{1+\ln x}}\cdot x - \sqrt{1+\ln x}\cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{1-2(1+\ln x)}{2x^2\sqrt{1+\ln x}}$$

$$= \frac{-1-2\ln x}{\underbrace{\boxed{2x^2\sqrt{1+\ln x}}}_{>0}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -1 = 2\ln x$$

$$\Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{e}}{e}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -1 > 2\ln x$$

$$\Leftrightarrow \ln x < -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x < e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{\sqrt{e}}{e}$$

On a : $\frac{1}{e} \approx 0,4$, $\frac{\sqrt{e}}{e} \approx 0,6$ et $f\left(\frac{\sqrt{e}}{e}\right) = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}}}{\frac{\sqrt{e}}{e}} = \frac{\sqrt{2e}}{2} \approx 1,2$

Tableau de variation :

x	$\frac{1}{e}$		$\frac{\sqrt{e}}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2e}}{e}$	$\searrow$	0

Maximum (absolu) atteint en $A\left(\frac{\sqrt{e}}{e};\frac{\sqrt{2e}}{2}\right)$

(b) $\forall x \in dom\, f, \quad f(x) \geq 0$

$$A = \int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\, dx$$

$$= \int_1^e (1+\ln x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x}\, dx \qquad \text{on pose : } u(x) = 1+\ln x \qquad u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$= \left[\frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}\right]_1^e$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 2^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot 1^{\frac{3}{2}}$$

$$= \boxed{\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)\ u.a.} \qquad (\approx 1{,}22\ u.a.)$$

(c) $$V = \pi \int_1^e \left(\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_1^e (1+\ln x) \cdot \frac{1}{x^2}\, dx$$

I.P.P. $\quad u(x) = 1+\ln x \qquad v'(x) = \frac{1}{x^2}$

$\quad u'(x) = \frac{1}{x} \qquad v(x) = -\frac{1}{x}$

Ainsi :

$$\int (1+\ln x) \cdot \frac{1}{x}\, dx = -\frac{1+\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$= -\frac{1+\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c$$

$$= -\frac{2+\ln x}{x} + c$$

et $$V = \pi \cdot \left[-\frac{2+\ln x}{x}\right]_1^e$$

$$= \pi \cdot \left(-\frac{3}{e} + \frac{2}{1}\right)$$

$$= \boxed{\pi \cdot \left(2 - \frac{3}{e}\right) u.v.} \qquad (\approx 2{,}82\ u.v.)$$

Question 4 ((2 + 4) + 5 = 11 points)

(1) (a) $\int \frac{3e^x+1}{e^x+1}\,dx = \int \frac{e^x+1+2e^x}{e^x+1}\,dx = \int \left(1+2\cdot\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx = \boxed{x+2\cdot\ln\left(e^x+1\right)+c}$

(b) $I = \int_0^{\frac{1}{6}} \arcsin(3x)\,dx$

I.P.P. $\quad u(x) = \arcsin(3x) \qquad v'(x) = 1$

$\quad u'(x) = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} \qquad v(x) = x$

$$I = \left[x\,\arcsin(3x)\right]_0^{\frac{1}{6}} + \int_0^{\frac{1}{6}} \frac{-3x}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{6}\arcsin\frac{1}{2} - 0\right) + \frac{1}{6}\int_0^{\frac{1}{6}} -18x\cdot(1-9x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{\pi}{6} + \frac{1}{6}\cdot 2\cdot\left[\sqrt{1-9x^2}\right]_0^{\frac{1}{6}}$$

$$= \frac{\pi}{36} + \frac{1}{3}\left(\sqrt{1-\frac{9}{36}} - 1\right)$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{36} + \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{3}}$$

(2) $f(x) = 3^{-x}$ $\qquad$ pas de C.E. : $\quad dom\,f = \mathbb{R} = dom\,f'$

$f'(x) = -\ln 3\cdot 3^{-x}$

Equation de la tangente au point d'abscisse a :

$$t \equiv y = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$$

$$\Leftrightarrow y = 3^{-a} - \ln 3\cdot 3^{-a}\,(x-a)$$

$O(0\,;\,0) \in t \Leftrightarrow 0 = 3^{-a} - \ln 3\cdot 3^{-a}\cdot(-a) \qquad \big|\,: 3^{-a} \neq 0$

$$\Leftrightarrow 0 = 1 + a\cdot\ln 3$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{\ln 3}$$

La seule tangente à G_f passant par l'origine est celle au point d'abscisse $a = -\frac{1}{\ln 3}$

On a : $\quad f\left(-\frac{1}{\ln 3}\right) = e \quad$ et $\quad f'\left(-\frac{1}{\ln 3}\right) = -e\cdot\ln 3$

D'où : $t \equiv y = e - e\ln 3\left(x + \frac{1}{\ln 3}\right) \quad \Leftrightarrow \boxed{y = -e\ln 3\cdot x}$