LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES

2020

CORRIGÉ – BARÈME

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques I	**D**	*Durée de l'épreuve :* 2h05 *Date de l'épreuve :* 9 juin 2020

Partie 1

Question 1

[12 points]

$P(z) = z^3 + (-1+3i)z^2 + (-6+5i)z - (14+8i)$

Soit bi la racine imaginaire pure de P, $(b \in \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} P(bi) = 0 &\iff (bi)^3 + (-1+3i)(bi)^2 + (-6+5i)(bi) - (14+8i) = 0 \\ &\iff -b^3 i - (-1+3i)b^2 - 6bi - 5b - 14 - 8i = 0 \\ &\iff (b^2 - 5b - 14) + (-b^3 - 3b^2 - 6b - 8)i = 0 \\ &\iff \begin{cases} b^2 - 5b - 14 = 0 & (1) \\ b^3 + 3b^2 + 6b + 8 = 0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Résolvons (1) : $\quad \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14) = 81$

$$b = \frac{5 \pm 9}{2} \iff b = 7 \lor b = -2$$

$b = -2$ est aussi solution de (2), car $(-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 + 6 \cdot (-2) + 8 \overset{!}{=} 0$.

Par conséquent : $z = -2i$ est la racine imaginaire pure de P. [4]

Schéma de Horner :

	1	$-1+3i$	$-6+5i$	$-14-8i$
$-2i$		$-2i$	$2+2i$	$14+8i$
	1	$-1+i$	$-4+7i$	0

D'où : $P(z) = (z+2i)[z^2 + (-1+i)z + (-4+7i)] = (z+2i) \cdot Q(z)$ [2]

$Q(z) = 0 \iff z^2 + (-1+i)z + (-4+7i) = 0$

$$\begin{aligned} \Delta &= (-1+i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4+7i) \\ &= 1 - 2i - 1 + 16 - 28i \\ &= 16 - 30i \end{aligned}$$ [2]

Soit $x + yi$ une racine carrée complexe de $16 - 30i$, $\quad (x;y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ 2xy = -30 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{16^2 + (-30)^2} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 16 & (1) \\ 2xy = -30 & (2) \\ x^2 + y^2 = 34 & (3) \end{cases}$$

$(1) + (3)$: $\quad 2x^2 = 50 \iff x = 5 \lor x = -5$

$(3) - (1)$: $\quad 2y^2 = 18 \iff y = 3 \lor y = -3$

De (2) : $\quad x$ et y sont de signes contraires.

Ainsi, les r.c.c. de $16-30i$ sont : $5-3i$ et $-5+3i$ et les racines de Q sont :

$$z_1 = \frac{1-i+5-3i}{2} = 3-2i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1-i-5+3i}{2} = -2+i$$ [3]

Finalement : $\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{-2i; 3-2i; -2+i\}}$ [1]

Question 2 [3+5=8 points]

1.

$$\begin{aligned} Z &= \left(\frac{4-3i}{1-\sqrt{5}\cdot i}\right)^2 : (2-\sqrt{5}\cdot i) \\ &= \frac{16-24i-9}{1-2\sqrt{5}i-5} \cdot \frac{1}{2-\sqrt{5}\cdot i} \\ &= \frac{(7-24i)}{(-4-2\sqrt{5}i)\cdot(2-\sqrt{5}\cdot i)} \\ &= \frac{7-24i}{-8+4\sqrt{5}\cdot i-4\sqrt{5}\cdot i-10} \\ &= \frac{7-24i}{-18} \\ &= -\frac{7}{18}+\frac{4}{3}i \end{aligned}$$

[3]

2. $(5+2i)z-(3-4i)\overline{z} = 7-i.$

Posons $z = a+bi \quad (a;b) \in \mathbb{R}^2$, donc $\overline{z} = a-bi$.

L'équation s'écrit :

$$\begin{aligned} & (5+2i)(a+bi)-(3-4i)(a-bi) = 7-i \\ \iff \; & 5a+5bi+2ai-2b-3a+3bi+4ai+4b = 7-i \\ \iff \; & (2a+2b)+(6a+8b)i = 7-i \\ \iff \; & \begin{cases} 2a+2b=7 \\ 6a+8b=-1 \end{cases} \\ \iff \; & \begin{cases} a=\frac{29}{2} \\ b=-11 \end{cases} \end{aligned}$$

$S = \left\{\frac{29}{2}-11i\right\}$ [5]

Partie 2

Question 3

[(10+2)+8=20 points]

1. (a)

$$\begin{aligned} z &= \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}i}{i\cdot(1-i)} \\ &= \frac{(-\sqrt{6}+\sqrt{2}i)\cdot(-i)\cdot(1+i)}{1\cdot(1+1)} \\ &= \frac{(\sqrt{6}i+\sqrt{2})\cdot(1+i)}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}i-\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}i \qquad (1) \end{aligned}$$

[3]

$$z=\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}i}{i\cdot(1-i)}=\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}i}{1+i}=\frac{z_1}{z_2}$$

Ecrivons $z_1=-\sqrt{6}+\sqrt{2}i$ sous forme trigonométrique :

$$|z_1|=\sqrt{(-\sqrt{6})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi_1 &= \frac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \varphi_1=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Donc : $z_1=2\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{6}$

Ecrivons $z_2=1+i$ sous forme trigonométrique :

$$|z_2|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \varphi_2=\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Donc : $z_2=\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$

D'où : $$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{2\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{6}}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}}=2\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)=2\operatorname{cis}\frac{7\pi}{12} \quad (2)$$

[7]

(b) Par (1) et (2) on conclut que : $\operatorname{cis}\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}i$

On en déduit par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \text{ et } \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$ [2]

2. $z = -64i = 64 \cdot (-i) = 64 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 64 \operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}$

Les racines cubiques complexes de z sont de la forme :

$z_k = \sqrt[3]{64} \operatorname{cis}\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}\right) = 4 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{2\pi}{3}\right)$, avec $k \in \{0;1;2\}$

$z_0 = 4 \operatorname{cis}\frac{\pi}{2} = 4i$

$z_1 = 4 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right) = 4 \operatorname{cis}\frac{7\pi}{6} = 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -2\sqrt{3} - 2i$

$z_2 = 4 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right) = 4 \operatorname{cis}\frac{11\pi}{6} = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3} - 2i$ [8]

Question 4 [8+12=20 points]

1. $$z^5 = 16\sqrt{3} - 16i \qquad (E)$$

Les solutions de (E) sont les racines cinquièmes complexes de $Z = 16\sqrt{3} - 16i$.

Ecrivons Z sous forme trigonométrique :

$$|Z| = \sqrt{(16\sqrt{3})^2 + (-16)^2} = 32$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi = \frac{16\sqrt{3}}{32} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi = -\frac{16}{32} = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \varphi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Donc : $Z = 32 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ [3]

Les racines cinquièmes complexes de Z sont de la forme :

$$Z_k = \sqrt[5]{32} \operatorname{cis}\left(\frac{-\frac{\pi}{6}+2k\pi}{5}\right) \qquad \text{avec } k \in \{0;1;2;3;4\}$$

$Z_0 = 2 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{30}\right)$

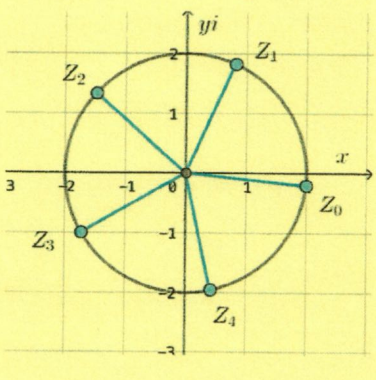
$Z_1 = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{11\pi}{30}\right)$

$Z_2 = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{23\pi}{30}\right)$

$Z_3 = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{35\pi}{30}\right) = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

$Z_4 = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{47\pi}{30}\right)$

$-\frac{\pi}{30}$ rad$=-6°$ et $\frac{2\pi}{5} = 72°$.



[5]

2. $$Z = \frac{(\sqrt{2}i)^{\,7} \cdot (3\sqrt{2} - \sqrt{6}i)^{\,3}}{(\sqrt{3} + 3i)^{\,5}} = \frac{(z_1)^{\,7} \cdot (z_2)^{\,3}}{(z_3)^{\,5}}$$

$$(z_1)^{\,7} = (\sqrt{2}i)^7 = \left(\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}\right)^7 = 8\sqrt{2}\ \operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{2}\right) = 8\sqrt{2}\ \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$z_2 = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}i$

$$|z_2| = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{6})^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi_2 &= \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi_2 &= -\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \varphi_2 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Donc : $z_2 = 2\sqrt{6}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$$(z_2)^{\,3} = (2\sqrt{6})^3\ \operatorname{cis}\left(-\frac{3\pi}{6}\right) = 48\sqrt{6}\ \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$z_3 = \sqrt{3} + 3i$

$$|z_3| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi_3 &= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \\ \sin\varphi_3 &= \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \varphi_3 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Donc : $z_3 = 2\sqrt{3}\ \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$(z_3)^{\,5} = (2\sqrt{3})^5\ \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 288\sqrt{3}\ \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$ [8]

$$\begin{aligned} Z &= \frac{(z_1)^{\,7} \cdot (z_2)^{\,3}}{(z_3)^{\,5}} \\ &= \frac{8\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot 48\sqrt{6}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{288\sqrt{3}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right)} \\ &= \frac{8}{3}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{3}\right) \\ &= \frac{8}{3}\operatorname{cis}\left(-\frac{8\pi}{3}\right) \\ &= \frac{8}{3}\operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \qquad \text{forme trigonométrique} \end{aligned}$$ [3]

$$\begin{aligned} &= \frac{8}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) \\ &= -\frac{4}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3}\,i \qquad \text{forme algébrique} \end{aligned}$$ [1]

Question 5 [20 points]

$$\begin{cases} 2x+(m-2)y+2z &= m+2 \\ -x+(2-m)y+z &= -1 \\ (m-2)x+3y &= m-2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 2 & m-2 & 2 \\ -1 & 2-m & 1 \\ m-2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot[-3+(m-2)^2]-[6-(m-2)^2] \\ &= 3(m-2)^2-12 \\ &= 3m(m-4) \end{aligned}$$

[2]

$$\begin{aligned} \det A_x &= \begin{vmatrix} m+2 & m-2 & 2 \\ -1 & 2-m & 1 \\ m-2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot[-3+(m-2)^2]-[3(m+2)-(m-2)^2] \\ &= -6+2(m-2)^2-3m-6+(m-2)^2 \\ &= 3(m-2)^2-3m-12 \\ &= 3(m^2-4m+4-m-4) \\ &= 3m(m-5) \end{aligned}$$

[2]

$$\begin{aligned} \det A_y &= \begin{vmatrix} 2 & m+2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ m-2 & m-2 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot[-(m-2)+(m-2)]-[2(m-2)-(m-2)(m+2)] \\ &= -2(m-2)+(m-2)(m+2) \\ &= (m-2)(m+2-2) \\ &= m(m-2) \end{aligned}$$

[2]

$$\det A_z = \begin{vmatrix} 2 & m-2 & m+2 \\ -1 & 2-m & -1 \\ m-2 & 3 & m-2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 2\cdot[-(m-2)^2+3]+[(m-2)^2-3(m+2)]+(m-2)[-(m-2)+(m-2)(m+2)] \\ &= -2(m-2)^2+6+(m-2)^2-3(m+2)+(m-2)(m-2)(m+1) \\ &= -(m-2)^2+6-3m-6+(m-2)^2(m+1) \\ &= (m-2)^2(m+1-1)-3m \\ &= m(m-2)^2-3m \\ &= m(m^2-4m+1) \end{aligned}$$

[3]

$\boxed{\text{Si } m \in \mathbb{R}\setminus\{0;4\}}$, alors $\det A \neq 0$ et le système admet une solution unique :

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{3m(m-5)}{3m(m-4)} = \frac{m-5}{m-4}$$

$$y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{m(m-2)}{3m(m-4)} = \frac{m-2}{3(m-4)}$$

$$z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{m(m^2-4m+1)}{3m(m-4)} = \frac{m^2-4m+1}{3(m-4)}$$

$$\boxed{S=\left\{\left(\frac{m-5}{m-4};\frac{m-2}{3(m-4)};\frac{m^2-4m+1}{3(m-4)}\right)\right\}}$$

Les équations du système sont celles de trois plans de l'espace qui se coupent au point

$P_m\left(\frac{m-5}{m-4};\frac{m-2}{3(m-4)};\frac{m^2-4m+1}{3(m-4)}\right)$. [4]

$\boxed{\text{Si } m=4}$, alors det $A=0$ et det$A_z\neq 0$, donc $\boxed{S=\varnothing}$

Les équations du système sont celles de trois plans de l'espace qui n'ont aucun point commun. [2]

$\boxed{\text{Si } m=0}$, alors det $A=0$ et det$A_x=$ det$A_y=$ det $A_z=0$; on ne peut pas conclure.

Le système s'écrit alors :

$$\begin{cases} 2x-2y+2z=2 & (1)\\ -x+2y+z=-1 & (2)\\ -2x+3y=-2 & (3)\end{cases}$$

$(1)+2\cdot(2)$: $\quad 2y+4z=0\Longleftrightarrow y+2z=0$

$(1)+(3)$: $\quad y+2z=0$

Le système est simplement indéterminé. Posons $z=k/k\in\mathbb{R}$. On a alors : $y=-2k$ et $x=-3k+1$

$\boxed{S=\{(-3k+1;-2k;k)/k\in\mathbb{R}\}}$

Les équations du système sont celles de trois plans de l'espace qui se coupent suivant la droite d de repère $(A;\overrightarrow{u})$, avec $A(1;0;0)$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}$. [5]

Question 6 [4+4+1+3+2+3+3=20 points]

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent un plan.

$$\begin{aligned} M(x;y;z)\in\pi &\Longleftrightarrow \overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\text{ et }\overrightarrow{AC}\text{ sont coplanaires}\\ &\Longleftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=0\\ &\Longleftrightarrow \begin{vmatrix}x+2 & -1 & 1\\ y-1 & 1 & 2\\ z+1 & 2 & 3\end{vmatrix}=0\\ &\Longleftrightarrow (x+2)(3-4)-(y-1)(-3-2)+(z+1)(-2-1)=0\\ &\Longleftrightarrow x-5y+3z+10=0 \qquad \text{(équation cartésienne du plan } \pi)\end{aligned}$$

[4]

2. $d\equiv\begin{cases} x+2y+3z=4 & (1)\\ 5x+4y+5z=3 & (2)\end{cases}$

$(2)-2\cdot(1)$: $\quad 3x-z=-5\Longleftrightarrow z=3x+5$

Posons $x=k\ /k\in\mathbb{R}$, on a alors : $z=3k+5$

Dans (1) : $k+2y+3(3k+5)=4\Longleftrightarrow y=-5k-\frac{11}{2}$

D'où un système d'équations paramétriques de d : $d \equiv \begin{cases} x = k \\ y = -5k - \dfrac{11}{2} \\ z = 3k + 5 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$

[4]

3. vecteur directeur de d : $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$; vecteur normal à π : $\overrightarrow{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont évidemment colinéaires, donc la droite d est perpendiculaire au plan π. [1]

4. Soit D le point de percée de d dans π.

$$D(x;y;z) \in d \cap \pi \iff \begin{cases} x = k & (1) \\ y = -5k - \dfrac{11}{2} & (2) \\ z = 3k + 5 & (3) \\ x - 5y + 3z + 10 = 0 & (4) \end{cases}$$

$(1), (2)$ et (3) dans (4) : $\quad k - 5\left(-5k - \dfrac{11}{2}\right) + 3(3k+5) + 10 = 0 \iff k = -\dfrac{3}{2}$

En remplaçant successivement dans $(1), (2)$ et (3), on obtient $x = -\dfrac{3}{2}$; $y = 2$ et $z = \dfrac{1}{2}$

La droite d perce le plan π au point $D\left(-\dfrac{3}{2}; 2; \dfrac{1}{2}\right)$. [3]

5. $E(x;y;-4) \in d \iff \begin{cases} x = k \\ y = -5k - \frac{11}{2} \\ -4 = 3k + 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3 \\ y = \frac{19}{2} \\ k = -3 \end{cases}$

Donc $E\left(-3; \dfrac{19}{2}; -4\right)$. [2]

6. $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{17}{2} \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'.

$$\begin{aligned} M(x;y;z) \in d' &\iff \overrightarrow{AM} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{AE} \\ &\iff (\exists k \in \mathbb{R}) \quad \overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AE} \\ &\iff (\exists k \in \mathbb{R}) \quad \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{17}{2} \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Système d'équations paramétriques de d' :

$$d' \equiv \begin{cases} x = -2 - k & (1) \\ y = 1 + \frac{17}{2}k & (2) \\ z = -1 - 3k & (3) \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{R})$$

De (1) : $\quad k = -2 - x$

Dans (2) : $\quad y = 1 + \frac{17}{2}(-2 - x) \Longleftrightarrow 17x + 2y + 32 = 0$

Dans (3) : $\quad z = -1 - 3(-2 - x) \Longleftrightarrow 3x - z + 5 = 0$

D'où un système d'équations cartésiennes de d' : $\begin{cases} 17x + 2y + 32 = 0 \\ 3x - z + 5 = 0 \end{cases}$ [3]

7. Le plan π' est perpendiculaire au plan π, donc le vecteur $\overrightarrow{n}$, normal au plan π est un vecteur directeur du plan π'.

   D'autre part, le vecteur $\overrightarrow{AE}$ est aussi un vecteur directeur du plan π', car π' comprend la droite (AE).

   Les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont évidemment non colinéaires.

   Finalement, $A \in \pi'$.

$$\begin{aligned} M(x;y;z) \in \pi' &\Longleftrightarrow \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{n} \text{ et } \overrightarrow{AE} \text{ sont coplanaires} \\ &\Longleftrightarrow (\exists(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2) \qquad \overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{n} + \beta \cdot \overrightarrow{AE} \\ &\Longleftrightarrow (\exists(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2) \qquad \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{17}{2} \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Système d'équations paramétriques du plan π' :

$$\pi' \equiv \begin{cases} x = -2 + \alpha - \beta \\ y = 1 - 5\alpha + \frac{17}{2}\beta \\ z = -1 + 3\alpha - 3\beta \end{cases} \qquad (\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$$

[3]