22.5.2017 Repêchage

CORRECTION

Exercice 1 : (14 points)

$$z^3+(2+2i)z^2+(10+12i)z-4(i-8)=0.$$

Soit ai avec $a\in\mathbb{R}$ la solution imaginaire pure.

On a : $-a^3i-(2+2i)a^2+(10i-12)a-4(i-8)=0$

3 $\Leftrightarrow\begin{cases}-2a^2-12a+32=0 & (1)\\ -a^3-2a^2+10a-4=0 & (2)\end{cases}$

$(1)\Leftrightarrow a^2+6a-16=0\Leftrightarrow a=2$ ou $a=-8$

$a=2$ est solution de (2) et $a=-8$ ne l'est pas.

Ainsi : $2i$ est solution de l'équation

Schéma de Horner :

	1	$2+2i$	$10+12i$	$32-4i$
2 $2i$		$2i$	$-8+4i$	$-32+4i$
	1	$2+4i$	$2+16i$	0

Ainsi : $z^3+(2+2i)z^2+(10+12i)z-4(i-8)=(z-2i)\left[z^2+(2+4i)z+2+16i\right]$

Il s'agit encore de résoudre $z^2+(2+4i)z+2+16i=0$ (E)

2 $\Delta=4-16+16i-8-64i=-20-48i \qquad |\Delta|=\sqrt{2704}=52$

Soit $\delta=\alpha+\beta i\ (\alpha,\beta\in IR)$ une racine carrée de Δ

4 On a : $\begin{cases}\alpha^2-\beta^2=-20 & (1)\\ \alpha^2+\beta^2=52 & (2)\\ \alpha\beta<0 & (3)\end{cases}$

$(1)+(2)$: $2\alpha^2=32 \Leftrightarrow \alpha^2=16 \Leftrightarrow \alpha=\pm4$

$(2)-(1)$: $2\beta^2=72 \Leftrightarrow \beta^2=36 \Leftrightarrow \beta=\pm6$

Comme $\alpha\beta<0: \delta=4-6i$ ou $\delta=-4+6i$

Ainsi les solutions de (E) sont :

$$z_1=\frac{-2-4i+4-6i}{2}=1-5i \text{ et } z_2=\frac{-2-4i-4+6i}{2}=-3+i$$

3 Donc : $S=\{2i;1-5i;-3+i\}$

Exercice 2 : (12 + 5 = 17 points)

1\. a. formes trigonométriques de z_1 et z_2 :

5 $$z_1=\left(4\sqrt{3}-4i\right)\cdot\left(-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,i\right)^3=8\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}-\tfrac{1}{2}i\right)\cdot 4^3\left(\tfrac{-\sqrt{2}}{2}+\tfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^3$$
$$=8\cdot 64\cdot cis\left(\tfrac{-\Pi}{6}\right)\cdot cis\left(3\cdot\tfrac{3\Pi}{4}\right)=512\cdot cis\left(\tfrac{-2\Pi+27\Pi}{12}\right)=512\cdot cis\left(\tfrac{25\Pi}{12}\right)=\underline{512\cdot cis\left(\tfrac{\Pi}{12}\right)}$$

3 $$z_2=\left(1-\sqrt{3}\,i\right)\cdot\left(-8i\right)^2=2\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\cdot\left(8cis\tfrac{-\Pi}{2}\right)^2=128\cdot cis\left(\tfrac{-\Pi}{3}-\Pi\right)=128\cdot cis\left(-\tfrac{4\Pi}{3}\right)=\underline{128\cdot cis\left(\tfrac{2\Pi}{3}\right)}$$

b. formes trigonométrique et algébrique de Z :

2 $$Z=\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2=\left(\frac{512cis\left(\frac{\Pi}{12}\right)}{128cis\left(\frac{2\Pi}{3}\right)}\right)^2=\left[4cis\left(\tfrac{\Pi-8\Pi}{12}\right)\right]^2=16cis\left(\tfrac{-7\Pi}{6}\right)=\underline{16cis\left(\tfrac{5\Pi}{6}\right)}\ \text{(f.t.)}$$

2 donc : $Z=16cis\left(\tfrac{5\Pi}{6}\right)=16\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}+\tfrac{1}{2}i\right)=\underline{-8\sqrt{3}+8i}$ (f.a.)

2\. Racines 4es de $-8\sqrt{3}+8i$

D'après 1. : $-8\sqrt{3}+8i=Z=16cis\left(\tfrac{5\Pi}{6}\right)$

Soit $z=r\cdot cis\varphi$ $(r>0)$ une racine quatrième de Z :

5 On a : $z^4=Z\Leftrightarrow\begin{cases}r^4=16\\4\varphi=\frac{5\Pi}{6}+2k\Pi\quad(k\in\mathbb{Z})\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}r=2\\\varphi=\frac{5\Pi}{24}+\frac{k\Pi}{2}\quad(k\in\mathbb{Z})\end{cases}$

Les racines 4es de Z sont donc :

$$z_0=2cis\left(\tfrac{5\Pi}{24}\right);\ z_1=2cis\left(\tfrac{17\Pi}{24}\right);\ z_2=cis\left(\tfrac{29\Pi}{24}\right);\ z_3=2cis\left(\tfrac{41\Pi}{24}\right)$$

Exercice 3 : (17 points)

Méthode de Cramer :

2 $$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & m & m-1 \\ 3 & 2 & m \\ m-1 & m & m+1 \end{vmatrix}=2(m+1)+m^2(m-1)+3m(m-1)-2(m-1)^2-3m(m+1)-m^2$$

$$=2m+2+m^3-m^2+3m^2-3m-2m^2+4m-2-3m^2-3m-m^2=m^3-4m^2=\underline{m^2(m-4)}\text{ racines: }0;4$$

2 $$\Delta_x=\begin{vmatrix} m & m & m-1 \\ 1 & 2 & m \\ 0 & m & m+1 \end{vmatrix}=2m(m+1)+0+m(m-1)-0-m(m+1)-m^3$$

$$=2m^2+2m+m^2-m-m^2-m-m^3=-m^3+2m^2=\underline{m^2(2-m)}\quad\text{racines: }0;2$$

2 $$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & m & m-1 \\ 3 & 1 & m \\ m-1 & 0 & m+1 \end{vmatrix}=m+1+m^2(m-1)+0-(m-1)^2-3m(m+1)-0$$

$$=m+1+m^3-m^2-m^2+2m-1-3m^2-3m=m^3-5m^2=\underline{m^2(m-5)}\text{ racines: }0;5$$

2 $$\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 3 & 2 & 1 \\ m-1 & m & 0 \end{vmatrix}=0+m(m-1)+3m^2-2m(m-1)-0-m$$

$$=m^2-m+3m^2-2m^2+2m-m=\underline{2m^2}\text{ racine: }0$$

a. Si $m\in\mathbb{R}-\{0;4\}$: $\Delta\neq0$ et système admet une **solution unique.** $S_m=\left\{\left(\frac{2-m}{m-4};\frac{m-5}{m-4};\frac{2}{m-4}\right)\right\}$

2 *Interprétation :* Le système est formé de 3 plans sécants en un point $A\left(\frac{2-m}{m-4};\frac{m-5}{m-4};\frac{2}{m-4}\right)$

b. Si $m=4$: On obtient :

2 $$\begin{cases} x+4y+3z=4 \\ 3x+2y+4z=1 \\ 3x+4y+5z=0 \end{cases}\underset{(E_3)/(E_3)-3(E_1)}{\overset{(E_2)/(E_2)-3(E_1)}{\Longleftrightarrow}}\begin{cases} x+4y+3z=4 \\ -10y-5z=-11 & |:(-5) \\ -8y-4z=-12 & |:(-4) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x+4y+3z=4 \\ 2y+z=\frac{11}{5} \\ 2y+z=3 \end{cases}\quad\text{impossible}$$

$S_4=\varnothing$

1 *Interprétation :* Le système est formé de 3 plans dont l'intersection est vide.

c. Si $m=0$:

On obtient : $\begin{cases} x-z=0 \\ 3x+2y=1 \\ -x+z=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} z=x \\ y=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x \end{cases}$ $\quad S_0=\left\{\left(x;\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x;x\right)\text{ avec }x\in\mathbb{R}\right\}$

2 *Interprétation :* En posant $x=k$, on obtient: $\begin{cases} x=k \\ y=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}k\ (k\in\mathbb{R}) \\ z=k \end{cases}$

2 Le système est formé de deux plans qui se coupent suivant la droite d passant par A(0 ; $\frac{1}{2}$;0) et de vecteur directeur $\vec{u}(1;-\frac{3}{2};1)$.

Exercice 4 : ***(2 + 4 + 3 + 3 = 12 points)***

1. $M(x,y,z)\in\Pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AM},\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires

2

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 3 \\ y-1 & -2 & 1 \\ z-4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3(x+2)-2(y-1)+7(z-4)=0$$

$$\Leftrightarrow 3x+6-2y+2+7z-28=0 \Leftrightarrow \underline{3x-2y+7z-20=0\,(\Pi)}$$

2. Le vecteur $\vec{n}(3;-2;7)$ est normal à Π.

Ainsi d est la droite passant par B et de vecteur directeur $\vec{n}$.

2

Donc : $\underline{d : \begin{cases} x=6+3\alpha \\ y=7-2\alpha \quad (\alpha\in IR) \\ z=20+7\alpha \end{cases}}$

2

3. On a : $C(x_c;11;7)\in d \Leftrightarrow \begin{cases} x=6+3\alpha & (1) \\ 11=7-2\alpha & (2) \\ 7=20+7\alpha & (3) \end{cases}$ $\quad$ (2) : $-2\alpha=4 \Leftrightarrow \alpha=-2$ $\quad$ dans (3) : $7=20-14$ faux

Un tel point n'existe donc pas !

4. Pour déterminer $d'\cap\Pi$, on résout :

3

$$\begin{cases} x=-8-\alpha \\ y=15+5\alpha \\ z=11+2\alpha \\ 3x-2y+7z-20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} x=-8-\alpha \\ y=15+5\alpha \\ z=11+2\alpha \\ -24-3\alpha-30-10\alpha+77+14\alpha-20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=0 \\ z=5 \\ \alpha=-3 \end{cases}$$

Donc : $\underline{D(-5;0;5)}$

5. La droite d' passe par $E(-8;15;11)$ et a comme vecteur directeur $\vec{w}(-1;5;2)$.

Donc Π' est le plan passant par $A(-2;1;4)$ et de vecteurs directeurs $\vec{w}(-1;5;2)$ et $\overrightarrow{AE}(-6;14;7)$ non colinéaires.

3 $M(x,y,z)\in\Pi' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM},\vec{w}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=k\cdot\vec{w}+l\cdot\overrightarrow{AE}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2=-k-6l \\ y-1=5k+14l \quad (k,l\in\mathbb{R}) \\ z-4=2k+7l \end{cases} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} x=-2-k-6l \\ y=1+5k+14l \quad (k,l\in\mathbb{R}) \\ z=4+2k+7l \end{cases}}$$