Examen de fin s'études secondaires 2015

Mathématiques I / section D

(16p)

I) $\underbrace{z^3-(4+3i)z^2+(1+11i)z+6(1-i)}_{P(z)}=0$

Remplaçons z par ai $(a\in\mathbb{R})$:

$(ai)^3-(4+3i)(ai)^2+(1+11i)\,ai+6(1-i)=0$

$\Leftrightarrow\quad 4a^2-11a+6+(-a^3+3a^2+a-6)i=0$

$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 4a^2-11a+6=0 & (E1)\\ -a^3+3a^2+a-6=0 & (E2)\end{cases}$ 3 p

$4a^2-11a+6=0 \Leftrightarrow a=\frac{3}{4}$ ou $a=2$ 1 p

$a=\frac{3}{4}$ ds $(E2)$: $-\left(\frac{3}{4}\right)^3+3\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{3}{4}-6=-\frac{255}{64}$

$a=2$ ds $(E2)$: $-2^3+3\cdot 2^2+2-6=0$

Donc $z_1=2i$ est une solution de $P(z)=0$ 2 p

Schéma de Horner :

	1	$-4-3i$	$1+11i$	$6-6i$
$2i$		$2i$	$2-8i$	$-6+6i$
	1	$-4-i$	$3+3i$	

2 p

$P(z)=(z-2i)\underbrace{(z^2-(4+i)z+(3+3i))}_{Q(z)}$ 1 p

Racines de $Q(z)$:

$\Delta=(-4-i)^2-4(3+3i)=3-4i$ 1 p

$\delta=x+iy$ tel que $\delta^2=\Delta$

$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x^2-y^2=3 & (E3)\\ 2xy=-4 & (E4)\\ x^2+y^2=5 & (E5)\end{cases}$ 1,5 p

$(E3) + (E5)$: $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$

$(E5) - (E3)$: $y^2 = 1 \Leftrightarrow y = 1$ ou $y = -1$

avec $(E4)$: $\delta_1 = 2 - i$ et $\delta_2 = -2 + i$

3p

Ainsi les racines de $Q(z)$ sont :

$$z_2 = \frac{4+i-(2-i)}{2} = 1+i \quad \text{et} \quad z_3 = \frac{4+i-(-2+i)}{2} = 3$$

Finalement : $S = \{ 2i \, ; \, 1+i \, ; \, 3 \}$

1,5p

(14p)

II) 8p

a) $z_1 = \frac{(1+\sqrt{3}i)(\sqrt{3}-i)\cdot i}{3+1} + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$= \frac{(2\sqrt{3}+2i)i}{4} + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$= 1 + \sqrt{3}\,i$ 3p

$|z_1| = 2$

$\left.\begin{array}{l}\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\\ \sin(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \varphi = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$

$z_1 = 2\ \mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 1,5p

$z_2 = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{\sqrt{2}\,i}$

$= \frac{(-1+i)\cdot i}{i\ i}$

$= \frac{-1-i}{-1}$

$= 1+i$ 2p

$|z_2| = \sqrt{2}$

$\left.\begin{array}{l}\cos(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\} \varphi = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

$z_2 = \sqrt{2}\ \mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 1,5p

4p

b) $z_3 = \frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{1+i}$

$= \frac{(-2+2\sqrt{3}i)(1-i)}{2}$

$= (-1+\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})i$ 2p

$z_3 = \frac{\left(2\ \mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2}{\sqrt{2}\ \mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

$= \frac{4\ \mathrm{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\ \mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

$= 2\sqrt{2}\ \mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ 2p

2p

c) $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$; $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$

III) (18p)

$$\det A = \begin{vmatrix} m & -m & 1 \\ 1 & -1 & m \\ m-2 & m-2 & m-2 \end{vmatrix} = -m(m-2) - m^2(m-2) + (m-2) - \left(-(m-2) + m^2(m-2) - m(m-2)\right)$$

$$= -2(m-2)(m^2-1)$$

$\det A \neq 0 \iff m \neq 2,\ m \neq 1$ et $m \neq -1$

2p

0p

1er cas $\quad m \in \mathbb{R} \setminus \{2; 1; -1\}$

$$-2(m-2)(1+m)$$

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 1 & -m & 1 \\ -1 & -1 & m \\ 0 & m-2 & m-2 \end{vmatrix} = -\cancel{(m-2)(3m+1)}$$ 1 p

$$\det A_y = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \\ m-2 & 0 & m-2 \end{vmatrix} = 0$$ 1 p

$$\det A_z = \begin{vmatrix} m & -m & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ m-2 & m-2 & 0 \end{vmatrix} = 2(m-2)(m+1)$$ 1 p

$$x = \frac{-(m-2)(3m+1)}{-2(m-2)(m^2-1)} = \frac{3m+1}{2(m^2-1)}$$ 0,5 p

$$y = 0$$ 0,5 p

$$z = \frac{2(m-2)(m+1)}{-2(m-2)(m+1)(m-1)} = \frac{1}{1-m}$$ 0,5 p

$$S_1 = \left\{\left(\frac{3m+1}{2(m^2-1)};\ 0;\ \frac{1}{1-m}\right)\right\}$$ 0,5 p

3 plans qui se coupent en 1 point 1p

P

2e cas $\quad m = 2$

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 1 & (E1) \\ x - y + 2z = -1 & (E2) \\ 0x + 0y + 0z = 0 & (E3) \end{cases}$$

$(E1) + (-2)(E2)$: $-3z = 3$ donc $z = -1$ $(E4)$

$(E4)$ ds. $(E1)$ et $(E2)$: $\begin{cases} 2x - 2y = 2 & \mid \cdot \frac{1}{2} \\ x - y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \iff y = x - 1$

Posons $x = \alpha$ $\begin{cases} x = \alpha \\ y = -1 + \alpha \\ z = -1 \end{cases}$

Le système représente 2 plans qui se coupent selon une droite passant par le point $(0 ; -1 ; -1)$ et de vecteur directeur $(1 ; 1 ; 0)$

2p 3e cas $m = 1$

$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - y + z = -1 \\ -x - y - z = 0 \end{cases}$ impossible (pas d'intersection, plans parallèles)

Les 3 plans n'ont pas de point en commun.

4p
4e cas $m = -1$

$\begin{cases} -x + y + z = 1 & (E1) \\ x - y - z = -1 & (E2) \\ -3x - 3y - 3z = 0 & (E3) \quad | \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \end{cases}$ $(E1) = (E2)\ (-1)$

$\begin{cases} x - y - z = -1 & (E2) \\ x + y + z = 0 & (E4) \end{cases}$

$(E2) + (E4)$: $2x = -1$ donc $x = -\frac{1}{2}$

$(E4) - (E2)$: $2y + 2z = 1$ d'où $y = \frac{1}{2} - z$

Posons $z = \alpha$ $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} - \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$

Le système représente 2 plans qui se coupent selon une droite passant par le point $\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 0\right)$ et de vecteur directeur $(0 ; -1 ; 1)$

IV (12p)

5p a) $d : \begin{cases} x = 4 + 4\alpha \\ y = -4 - 4\alpha \\ z = -3\alpha \end{cases}$ 1p $\quad d' : \begin{cases} x - y - 3z = -6 \\ x - 2y - 5z = -10 \end{cases}$

Intersection : $\left.\begin{cases} 4 + 4\alpha - (-4-4\alpha) - 3(-3\alpha) = -6 \\ 4 + 4\alpha - 2(-4-4\alpha) - 5(-3\alpha) = -10 \end{cases}\right\}$ 1p

$\left.\begin{cases} \alpha = -\frac{14}{17} \\ \alpha = -\frac{22}{27} \end{cases} \text{ impossible donc } d \cap d' = \emptyset \right\}$ 3p

2p b) $\pi : 4x - 4y - 3z = d$ avec $M(1;1;2) \in \pi$ $\cancel{4}\cancel{-4}-6 = d$ donc

$\pi : 4x - 4y - 3z = -6$

5p c) $\left.\begin{cases} 4x - 4y - 3z = -6 & (E1) \\ x - y - 3z = -6 & (E2) \\ x - 2y - 5z = -10 & (E3) \end{cases} \quad x = 2y + 5z - 10 \quad (E4) \right\}$ 1p

(E4) ds (E1) $\begin{cases} 4y + 17z = 34 & (E5) \\ y + 2z = 4 \end{cases}$ (E4) ds (E2) $\Leftrightarrow \quad y = -2z + 4 \quad (E6)$

(E6) ds (E5) $\quad z = 2 \quad (E7)$

(E7) ds (E6) $\quad y = 0 \quad (E8)$

(E8) et (E7) ds (E4) $\quad x = 0$

Ainsi $\pi \cap d' = P(0;0;2)$

4p