Corrigé

Question I (15 points)

$$\underbrace{z^3+iz^2+(8+2i)z+6+12i}_{P(z)}=0 \quad (E)$$

Soit $z=bi \quad (b\in\mathbb{R})$ la racine imaginaire pure de P :

$P(bi)=0$

$\Leftrightarrow (bi)^3+i(bi)^2+(8+2i)\cdot bi+6+12i=0$

$\Leftrightarrow -b^3i-b^2i+8bi-2b+6+12i=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2b+6=0 \quad (L_1) \\ -b^3-b^2+8b+12=0 \quad (L_2) \end{cases}$$

$(L_1) \Leftrightarrow \quad b=3$

En remplaçant $b=3$ dans (L_2) : $-27-9+24+12\overset{!}{=}0$

Conclusion : $3i$ est une racine de P.

$P(z)$ est donc divisible par $(z-3i)$:

	1	i	$8+2i$	$6+12i$
$3i$		$3i$	-12	$-6-12i$
	1	$4i$	$-4+2i$	0

D'où :

$(E) \Leftrightarrow \quad z=3i \quad ou \quad z^2+4iz+(-4+2i)=0$

- $\Delta=(4i)^2-4(-4+2i)=-16+16-8i=-8i$

  $\delta=x+iy$ est une racine carrée de Δ

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=0 \\ 2xy=-8 \\ x^2+y^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=8 \\ xy=-4 \\ 2y^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 2 \\ xy=-4 \\ y=\mp 2 \end{cases}$$

  $\delta=2-2i$ est donc une racine carrée de Δ

- $z'=\dfrac{-4i+(2-2i)}{2}=\dfrac{2-6i}{2}=1-3i$

  $z''=\dfrac{-4i-(2-2i)}{2}=\dfrac{-2-2i}{2}=-1-i$

Conclusion : $S_{\mathbb{C}}=\{\ 3i\,;1-3i\,;-1-i\ \}$

Question II (3+5+4+3 = 15 points)

1)

- $z_1 = \dfrac{3i-\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$; $|z_1| = \sqrt{\dfrac{3}{4}+\dfrac{9}{4}} = \sqrt{3}$

  $z_1 = \sqrt{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \sqrt{3}\cdot cis\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$

- $z_2 = \sqrt{2}-\sqrt{2}\,i$; $|z_2| = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$

  $z_2 = 2\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\cdot cis\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

2)

- Forme algébrique de Z :

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{3i-\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i} = \frac{\left(3i-\sqrt{3}\right)}{2\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)}$$

$$Z = \frac{3\sqrt{2}i-3\sqrt{2}-\sqrt{6}-\sqrt{6}i}{2\cdot(2+2)} = \frac{\left(-3\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)+i\left(3\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{8}$$

- Forme trigonométrique de Z :

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}\cdot cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{2\cdot cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}cis\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}cis\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

3) Par identification :

$$\begin{cases} \dfrac{-3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right) & (L_1) \\[2ex] \dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right) & (L_2) \end{cases}$$

En divisant (L_2) par (L_1) :

$$\tan\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{-3\sqrt{2}-\sqrt{6}} = -\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3\sqrt{2}+\sqrt{6}} = -\frac{\left(3\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)^2}{18-6} = -\frac{18-6\sqrt{12}+6}{12}$$

$$\tan\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{24-12\sqrt{3}}{12} = -\left(2-\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}-2$$

4) Soit $z' = r \cdot cis\alpha$ la forme trig. d'une racine cubique de $z_2 = 2 \cdot cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

$$(z')^3 = 2 \cdot cis\left(-\frac{\pi}{4}\right) \quad \Leftrightarrow (r \cdot cis\alpha)^3 = 2 \cdot cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[3]{2} \\ 3\alpha = -\frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[3]{2} \\ \alpha = -\frac{\pi}{12} \quad \left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{cases}$$

Les racines cubiques de z_2 sont :

$$z'_k = \sqrt[3]{2} \cdot cis\left(-\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3}\right) \text{ avec } k = 0,1,2$$

$$z'_0 = \sqrt[3]{2} \cdot cis\left(-\frac{\pi}{12}\right) ; z'_1 = \sqrt[3]{2} \cdot cis\left(\frac{7\pi}{12}\right) ; z'_2 = \sqrt[3]{2} \cdot cis\left(\frac{15\pi}{12}\right)$$

<u>Question III (4+5+6 = 15 points)</u>

1) Posons : $A = \begin{pmatrix} m & m & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & m-3 & 3 \end{pmatrix}$

$$dét\ A = \begin{vmatrix} m & m & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & m-3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= m \cdot [-3 - 2(m-3)] - m \cdot (6-14) - 3 \cdot [2(m-3)+7] = m \cdot (-2m+3) + 8m - 3 \cdot (2m+1)$$

$$dét\ A = -2m^2 + 5m - 3$$

$$dét\ A \overset{(\Delta=1)}{=} -2 \cdot (m-1) \cdot \left(m - \frac{3}{2}\right)$$

Pour $m \in \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2};1\right\}$, le système admet une solution unique.

2) Pour $m=3$, le système admet une solution unique.

$$\begin{cases} 3x+3y-3z=0 & (L_1) \\ 2x-y+2z=5 & (L_2) \\ 7x \quad +3z=15 & (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=5 \\ z=5 \end{cases}$$

D'où : $S_{\mathbb{R}^3}=\{(0;5;5)\}$

3) Pour $m=1$:

$$\begin{cases} x+y-3z=0 \\ 2x-y+2z=5 \\ 7x-2y+3z=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-3z=0 \\ 3y-8z=-5 \\ 9y-24z=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y+3z \\ 3y=8z-5 \\ z\in\mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-y+3z \\ y=\frac{8}{3}z-\frac{5}{3} \\ z\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{8}{3}z+\frac{5}{3}+3z \\ y=\frac{8}{3}z-\frac{5}{3} \\ z\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3}z+\frac{5}{3} \\ y=\frac{8}{3}z-\frac{5}{3} \\ z\in\mathbb{R} \end{cases}$$

$$S_{\mathbb{R}^3}=\left\{\left(\frac{1}{3}k+\frac{5}{3};\frac{8}{3}k-\frac{5}{3};k\right) \middle| k\in\mathbb{R}\right\}$$

<u>Interprétation géométrique</u> : il s'agit de trois plans de l'espace (non parallèles) qui se coupent selon une droite.

Question IV (6+3+6 = 15 points)

$A(-2;0;3)$ et la droite $d \equiv \begin{cases} x = 3k-1 \\ y = -k \\ z = 5k+2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$

1) $A(-2;0;3) \notin d \quad B(-1;0;2) \in d$

Un vecteur directeur de la droite d est aussi un v.d. de π : $\overrightarrow{v_d}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est aussi un v.d. de π , non colinéaire à $\overrightarrow{v_d}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$M(x;y;z) \in \pi$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{v_d}$ sont coplanaires

$\Leftrightarrow$ dét$\left(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{v_d}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 3 \\ y & 0 & -1 \\ z-3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -(5y+z-3)+[-(x+2)-3y] = 0$

$\Leftrightarrow -5y-z+3-x-2-3y = 0$

$\Leftrightarrow -x-8y-z+1 = 0 \quad (\pi)$

$\Leftrightarrow x+8y+z-1 = 0 \quad (\pi)$

2) Comme le plan π' est perpendiculaire à d, le vecteur $\overrightarrow{v_d}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de π'.

L'équation de π' s'écrit sous la forme : $\pi' \equiv 3x - y + 5z + k = 0$

$A(-2;0;3) \in \pi'$

$\Leftrightarrow 3\cdot(-2) - 0 + 5\cdot 3 + k = 0$

$\Leftrightarrow -6 + 15 + k = 0$

$\Leftrightarrow k = -9$

D'où : $\pi' \equiv 3x - y + 5z - 9 = 0$

3) Intersection des droites $d \equiv \begin{cases} x = 3k-1 \\ y = -k \\ z = 5k+2 \end{cases}$ et $d' \equiv \begin{cases} x = -3m+2 \\ y = 2m-5 \\ z = -4m+3 \end{cases}$.

Vecteurs directeurs de d et de d' : $\overrightarrow{v_d}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_{d'}}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires. Les droites d et d' ne sont donc pas parallèles. Etudions leur intersection:

$$\begin{cases} x = 3k-1 \\ y = -k \\ z = 5k+2 \\ x = -3m+2 \\ y = 2m-5 \\ z = -4m+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k-1 \\ y = -k \\ z = 5k+2 \\ 3k-1 = -3m+2 \\ -k = 2m-5 \\ 5k+2 = -4m+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k-1 \\ y = -k \\ z = 5k+2 \\ 3k-1 = -3m+2 \\ k = -2m+5 \\ 5k = -4m+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k-1 \\ y = -k \\ z = 5k+2 \\ 3k-1 = -3m+2 \\ k = -2m+5 \quad (L_4) \\ 5k = -4m+1 \quad (L_5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k-1 \\ y = -k \\ z = 5k+2 \\ 3k-1 = -3m+2 \\ k = -2m+5 \\ 0 = -6m+24 \quad (\leftarrow 5L_4 - L_5) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k-1 \\ y = -k \\ z = 5k+2 \\ -9-1 \overset{!}{=} -12+2 \\ k = -3 \\ m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 \\ y = 3 \\ z = -13 \\ -9-1 \overset{!}{=} -12+2 \\ k = -3 \\ m = 4 \end{cases}$$

$d \cap d' = \{(-10\,;3\,;-13)\}$