CORRIGÉ MATHÉMATIQUES I

Question I

1) $z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = 2 \ \text{cis}\ \frac{\pi}{3}$

$$z_2 = \frac{7i-1}{4+3i} - \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \frac{(7i-1)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} - \left(\frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}\right)^2$$

$$= \frac{28i+21-4+3i}{16+9} - \left(\frac{2+i+2i-1}{4+1}\right)^2 = \frac{17+31i}{25} - \left(\frac{1+3i}{5}\right)^2$$

$$= \frac{17+31i}{25} - \frac{1+6i-9}{25} = \frac{17+31i+8-6i}{25} = \frac{25+25i}{25} = 1+i$$

$$z_2 = 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = \sqrt{2}\ \text{cis}\ \frac{\pi}{4}$$

2) $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2\ \text{cis}\frac{\pi}{3}}{\sqrt{2}\ \text{cis}\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\ \text{cis}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\ \text{cis}\ \frac{\pi}{12}$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i \sin\frac{\pi}{12}\right)$$

D'autre part $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i+i\sqrt{3}+\sqrt{3}}{1+1}$

$$= \frac{1+\sqrt{3}+(\sqrt{3}-1)i}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)$$

D'où $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Question II

$$z^3 - 2z^2 + 2(2-3i)z - 20 = 0 \qquad (E)$$

$z = bi$ est une racine de (E)

$\Leftrightarrow (bi)^3 - 2(bi)^2 + (4-6i)bi - 20 = 0$

$\Leftrightarrow -b^3 i + 2b^2 + 4bi + 6b - 20 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2 + 6b - 20 = 0 & (1) \\ -b^3 + 4b = 0 & (2) \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow b(-b^2+4) = 0 \Leftrightarrow b = 0$ ou $b^2 = 4$

$\Leftrightarrow b = 0$ ou $b = -2$ ou $b = 2$

$b = 0$ dans (1) : $-20 = 0$ Faux $\rightarrow$ à écarter

$b = -2$ dans (1) : $2(-2)^2 + 6\cdot(-2) - 20 = 0 \Leftrightarrow 8 - 12 - 20 = 0$, Faux $\rightarrow$ à écart.

$b = 2$ dans (1) : $2 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 20 = 0 \Leftrightarrow 8 + 12 - 20 \overset{!}{=} 0$

$z_0 = 2i$ est donc une racine imaginaire pure de (E)

Schéma de Horner

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & -2 & 4-6i & -20 \\
2i & & 2i & -4i-4 & 20 \\
\hline
 & 1 & -2+2i & -10i & 0
\end{array}
$$

D'où $(E) \Leftrightarrow (z-2i)\,\left(z^2 + (-2+2i)z - 10i\right) = 0$

Résolvons $z^2 + (-2+2i)z - 10i = 0$

$$\Delta = (-2+2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10i) = \cancel{4} - 8i \cancel{-4} + 40i = 32i$$

$a+bi$ est racine carrée complexe de $32i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 & (1) \\ 2ab = 32 & (2) \\ a^2 + b^2 = 32 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow a = b$$

(3) : $2a^2 = 32 \Leftrightarrow a^2 = 16 \Leftrightarrow a = 4$ ou $a = -4$

$4+4i$ et $-4-4i$ sont les racines carrées complexes de $32i$

d'où $z_1 = \dfrac{2-2i-4-4i}{2} = \dfrac{-2-6i}{2} = -1-3i$

$z_2 = \dfrac{2-2i+4+4i}{2} = \dfrac{6+2i}{2} = 3+i$

Finalement $S = \{2i \,;\, -1-3i \,;\, 3+i\}$

Question III

Calculons

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & 3 & 2m \\ m & 2m & 1 \end{vmatrix}
\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ m & 2m \end{matrix}
$$

$$= 3 + \cancel{4m^2} + 2m^2 - 3m^2 - \cancel{4m^2} - 2$$

$$= 1 - m^2$$

$$= (1-m)(1+m)$$

Discussion :

$\underline{* \text{ si } m \neq 1 \text{ et } m \neq -1}$ système cramérien :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & m \\ m & 3 & 2m \\ 2 & 2m & 1 \end{vmatrix}}{(1-m)(1+m)} = \frac{6+8m+2m^3-6m-8m^2-2m}{(1-m)\ (1+m)} = \frac{2m^3-8m^2+6}{(1-m)(1+m)}$$

$$= \frac{2(m-1)(m^2-3m-3)}{(1-m)(1+m)} = \frac{-2\ (m^2-3m-3)}{1+m}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & m & 2m \\ m & 2 & 1 \end{vmatrix}}{(1-m)\ (1+m)} = \frac{m+4m^2+2m-m^3-4m-2}{(1-m)\ (1+m)} = \frac{-m^3+4m^2-m-2}{(1-m)\ (1+m)}$$

$$= \frac{-(m-1)\ (m^2-3m-2)}{(1-m)\ (1+m)} = \frac{m^2-3m-2}{1+m}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & m \\ m & 2m & 2 \end{vmatrix}}{(1-m)(1+m)} = \frac{6+2m^2+4m-6m-2m^2-4}{(1-m)\ (1+m)} = \frac{-2m+2}{(1-m)(1+m)} = \frac{2}{1+m}$$

d'où $S = \left\{ \left(\frac{-2m^2+6m+6}{1+m} ; \frac{m^2-3m-2}{1+m} ; \frac{2}{1+m} \right) \right\}$

$\underline{* \quad \text{si } m = 1}$

$$(S) \iff \begin{cases} x+2y+z=2 \\ x+3y+2z=1 \\ x+2y+z=2 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y+z=2 & (1) \\ x+3y+2z=1 & (2) \end{cases}$$

$$\overset{(2)-(1)}{\iff} \begin{cases} x+2y+z=2 & (1) \\ y+z=-1 & (2) \end{cases} \qquad \text{posons } z=\alpha$$

(2) : $y=-1-\alpha$; (1) $x=-2(-1-\alpha)-\alpha+2 = 4+\alpha$

d'où $S_1 = \{ (4+\alpha ; -1-\alpha ; \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$

<u>Interprétation géométrique</u>:

(S) est un système de trois équations de plans de l'espace dont l'intersection est la droite passant par $A(4;-1;0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{* \quad \text{si } m=-1}$

$$(S) \iff \begin{cases} x+2y-z=2 \\ x+3y-2z=-1 \\ -x-2y+z=2 \end{cases} \overset{(1)+(3)}{\iff} \begin{cases} 0 \cdot z = 4 \\ x+3y-2z=-1 \end{cases} \text{ système impossible}$$

d'où $S_{-1} = \emptyset$. <u>Interprétation géométrique</u>:

(S) est un système de trois équations de plans de l'espace qui n'ont aucun point commun.

Question IV

$$\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x-z=6 \end{cases}$$

1) pour $x=0$; on obtient $A(0;6;-6) \in d$

pour $z=0$; on obtient $B(6;-12;0) \in d$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-18\\6\end{pmatrix}$. Donc $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

2) $\begin{cases} x = \alpha \\ y = 6-3\alpha \\ z=-6+\alpha \end{cases}$ est un système d'équations paramétriques de d.

3) $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de π.

Une équation cartésienne de π est donc de la forme

$$x-3y+z=d$$

$M(2;0-1)\in\pi \iff 2-3\cdot 0+(-1)=d \iff d=1$

Finalement $\pi \equiv x-3y+z=1$

4) Résolvons le système d'équations

$$\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x-z=6 \\ x-3y+z=1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+y+z=0 & (1) \\ x=z+6 & (2) \\ x-3y+z=1 & (3) \end{cases}$$

(2) dans (1) et dans (3)

$$\iff \begin{cases} y+3z=-12 & (1) \\ x=z+6 & (2) \\ -3y+2z=-5 & (3) \end{cases} \underset{3\cdot(1)+(3)}{\iff} \begin{cases} y+3z=-12 \\ x=z+6 \\ 11\cdot z=-41 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=-\frac{9}{11} \\ x=\frac{25}{11} \\ z=\frac{-41}{11} \end{cases} \qquad d\cap\pi=\left\{\left(\frac{25}{11};-\frac{9}{11};\frac{-41}{11}\right)\right\}$$

d et π se coupent en le point $C\left(\frac{25}{11};-\frac{9}{11};\frac{-41}{11}\right)$