Corrigé, Math I, section D, repêchage juin 09

I 1) Soit $z = bi$ $(b \in \mathbb{R})$ une solution imaginaire pure de :

$$iz^3 - 2(2-i)z^2 - 2(3+4i)z + 8 - 4i = 0 \quad (\Leftrightarrow P(z)=0)$$

Alors : $b^3 i^4 - 2(2-i)b^2 i^2 - 2(3+4i)bi + 8 - 4i = 0$

$\Leftrightarrow b^3 + 4b^2 - 2ib^2 - 6bi + 8b + 8 - 4i = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^3 + 4b^2 + 8b + 8 = 0 & (1) \\ -2b^2 - 6b - 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

$(2) \Leftrightarrow b^2 + 3b + 2 = 0$, $\Delta = 9 - 8 = 1$, $b' = \frac{-3+1}{2} = -1$, $b'' = \frac{-3-1}{2} = -2$

$\rightarrow (1)$: $\underline{b=-1}$: $-1 + 4 - 8 + 8 \neq 0$

$\underline{b=-2}$: $-8 + 16 - 16 + 8 \overset{!}{=} 0$

donc $\underline{-2i \in S}$ et $P(z)$ est divisible par $z + 2i$:

	i	$-4+2i$	$-6-8i$	$8-4i$
$-2i$		2	$4i+4$	$4i-8$
	i	$-2+2i$	$-2-4i$	0

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = -2i$ ou $iz^2 + (-2+2i)z - 2 - 4i = 0$

$\Delta' = (-2+2i)^2 - 4i(-2-4i)$

$= \cancel{4} - \cancel{8i} - \cancel{4} + \cancel{8i} - 16$

$= (4i)^2$

$z' = \frac{2 - 2i + 4i}{2i} = \frac{2+2i}{2i} = \frac{1+i}{i} = -i + 1$

$z'' = \frac{2 - 2i - 4i}{2i} = \frac{2-6i}{2i} = \frac{1-3i}{i} = -i - 3$

$$S = \{-2i ; 1-i ; -3-i\}$$

2) $\begin{cases} t_0 = -2i & \text{car } R(t_0) = 0 \\ t_1 = -3-i & \text{car } R(t_1) = -3 \text{ et } R(t_2) = 1 \text{ et } -3 < 1 \\ t_2 = 1-i \end{cases}$

$m(-3-i) + in(1-i) = -2i \quad (m, n \in \mathbb{R})$

$\Leftrightarrow -3m - mi + ni + n + 2i = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3m + n = 0 & (3) \\ -m + n + 2 = 0 & (4) \end{cases}$$

(3) : $n = 3m$

$\rightarrow (4)$: $-m + 3m = -2 \Leftrightarrow 2m = -2 \Leftrightarrow \underline{m = -1}$

donc $\underline{n = -3}$

II $Z = \dfrac{(\sqrt{3}-i)^7}{16 \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}}$

1) posons $z_1 = \sqrt{3} - i$, alors :

$|z_1| = \sqrt{3+1} = 2$

$$\left.\begin{array}{l}\cos \varphi_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin \varphi_1 = -\frac{1}{2} = -\sin \frac{\pi}{6} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\end{array}\right\} \varphi_1 = -\frac{\pi}{6}$$

donc $z_1 = 2 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ et $z_1^7 = 2^7 \operatorname{cis}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

D'où : $Z = \dfrac{\cancel{2^7}^{\,3} \cdot \operatorname{cis}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)}{\cancel{2^4} \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}} = 8 \cdot \operatorname{cis}\left(-\frac{7\pi}{6} - \frac{4\pi}{3}\right) = 8 \operatorname{cis}\left(-\frac{\cancel{15}^{\,5}\pi}{\cancel{6}_{2}} + 2\pi\right)$

$Z = \underline{8 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$ (forme trigon.)

$Z = 8 \cdot (-i) = \underline{-8i}$ (forme alg.)

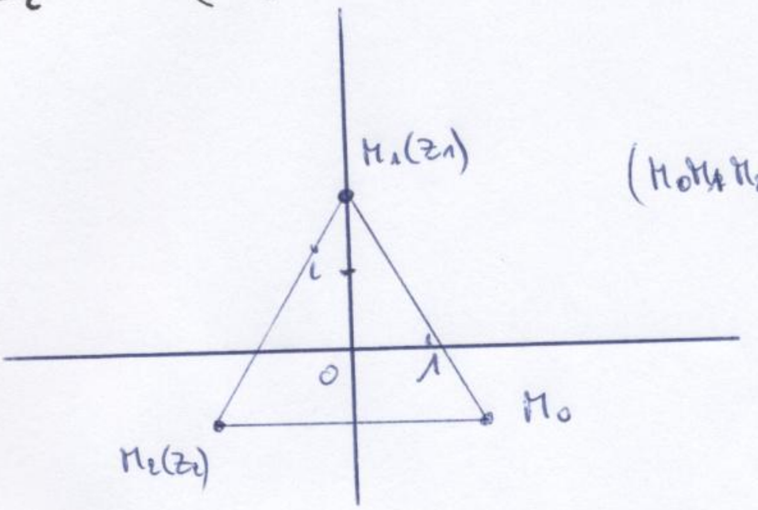
2) $|Z| = 8$, rac. cubiques complexes de Z :

$z_k = \sqrt[3]{8} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) \qquad k = 0, 1, 2$

$$\left\{\begin{array}{l} z_0 = 2 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ z_1 = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{6}\right) = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \\ z_2 = 2 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6} \end{array}\right. \quad \text{(forme trigon.)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} z_0 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2 \cos \frac{\pi}{6} - 2i \sin \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} - i \quad \text{(forme alg.)} \\ z_1 = 2i \\ z_2 = 2 \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 2i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -2 \cos \frac{\pi}{6} - 2i \sin \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3} - i \end{array}\right.$$

3)



$(M_0 M_1 M_2)$ = triangle équilatéral

4) $z_0^2+z_1^2+z_2^2 = (\sqrt{3}-i)^2+(2i)^2+(-\sqrt{3}-i)^2$

$=3-2\sqrt{3}i-1-4+3+2\sqrt{3}i-1$

$=0$

$z_0^2\cdot z_1^2\cdot z_2^2 = 4\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot 4\,\text{cis}\,\pi\cdot 4\,\text{cis}\,\frac{7\pi}{3}$

$=64\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{3}+\pi+\frac{7\pi}{3}\right)$

$=64\,\text{cis}\left(\pi+\cancel{2\pi}\right)$

$=-64$

III

$$\Delta=\begin{vmatrix}1-a & -1 & -1\\ -1 & 0 & 1+a\\ -a & -2 & 2a\end{vmatrix}=a(1+a)-2-2a+2(1-a)(1+a)=\cdots$$

$$=-a^2-a=-a(a+1)$$

$\Delta=0 \Leftrightarrow -a=0$ ou $a+1=0 \Leftrightarrow a=0$ ou $a=-1$

1er cas: $a\in\mathbb{R}^*\setminus\{-1\}$, $\Delta\neq 0 \to$ solution unique

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}a-1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & a+1\\ 2a+1 & -2 & 2a\end{vmatrix}=-(a+1)(2a+1)+2+2(a+1)(a-1)+2a$$

$$=-\cancel{2a^2}-a-\cancel{2a}-1+\cancel{2}+\cancel{2a^2}-\cancel{2}+\cancel{2a}$$

$$=-a-1$$

$x=\frac{-(a+1)}{-a(a+1)}=\frac{1}{a}$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}1-a & a-1 & -1\\ -1 & 1 & a+1\\ -a & 2a+1 & 2a\end{vmatrix}=2a(1-a)-a(a-1)(a+1)+2a+1-a$$

$$-(2a+1)(1-a)(1+a)+2a(a-1)$$

$$=\cancel{2a}-\cancel{2a^2}-a^3+\cancel{a}+\cancel{a}+\cancel{1}-\cancel{2a}+2a^3-\cancel{1}+a^2+\cancel{2a^2}-\cancel{2a}$$

$$=a^3+a^2$$

$$=a^2(a+1)$$

$y=\frac{a^{\cancel{2}}\cancel{(a+1)}}{-\cancel{a}\cancel{(a+1)}}=-a$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}1-a & -1 & a-1\\ -1 & 0 & 1\\ -a & -2 & 2a+1\end{vmatrix}=a+2(a-1)+2(1-a)-(2a+1)$$

$$=a+\cancel{2a}-\cancel{2}+\cancel{2}-\cancel{2a}-2a-1$$

$$=-a-1=-(a+1)$$

$z=\frac{-\cancel{(a+1)}}{-a\cancel{(a+1)}}=\frac{1}{a}$ D'où $S=\left\{\left(\frac{1}{a},-a,\frac{1}{a}\right)\right\}$

Les 3 plans se coupent au point $I\left(\frac{1}{a},-a,\frac{1}{a}\right)$

2^e cas : $a=0$ ($\Delta=0$ donc 0 ou une infinité de solutions)

$$\begin{cases} x-y-z=-1 & (1) \\ -x+z=1 & (2) \\ -2y=1 & (3) \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} (1)+(2) : -y=0 \Leftrightarrow y=0 \\ (3) : y=-\frac{1}{2} \end{array}\right]$ impossible, donc $S=\emptyset$

Les 3 plans n'ont donc aucun point commun

plus précisément : $(3)\to(1)$: $x+\frac{1}{2}-z=-1 \Leftrightarrow x-z=-\frac{3}{2}$

d'où : $\begin{cases} x-z=-\frac{3}{2} & (1) & \equiv \pi_1 \\ x-z=-1 & (2) & \equiv \pi_2 \\ y=-\frac{1}{2} & (3) & \equiv \pi_3 \end{cases}$

$\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ et π_3 plan sécant

3^e cas : $a=-1$ ($\Delta=0$ donc 0 ou une infinité de solutions)

$$\begin{cases} 2x-y-z=-2 \\ -x=1 \\ x-2y-2z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ z=-y \end{cases}$$

$S=\{(-1,y,-y) \mid y\in\mathbb{R}\}$

en posant $y=k$: $\begin{cases} x=-1 \\ y=k \\ z=-k \end{cases}$ système d'éq. param. d'une droite d passant par $A(-1,0,0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

IV 1) $M(x,y,z)\in\pi \Leftrightarrow \vec{AM}\begin{pmatrix}x\\y+1\\z-1\end{pmatrix} \perp \vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \vec{AM}\cdot\vec{n}=0$

$\Leftrightarrow x+y+1-z+1=0$

d'où $\pi \equiv x+y-z+2=0$

2) $-1+0-1+2 \overset{!}{=} 0$ donc $B\in\pi$

$1-1-0+2 \neq 0$ donc $C\notin\pi$

3) $d\perp\pi$ donc $\vec{n}$ = vect. normal à π = vect. directeur de d

D'où $d \equiv \begin{cases} x=1+k \\ y=-1+k \\ z=-k \end{cases}$ $(k\in\mathbb{R})$

4) $M(x,y,z) \in d \cap \pi \iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{R} : & x = 1+k \quad (1) \\ & y = -1+k \quad (2) \\ & z = -k \quad (3) \\ x+y-z+2=0 & \quad (4) \end{cases}$

$(1),(2),(3) \to (4) : \cancel{1}+k \cancel{-1}+k+k+2=0 \iff 3k+2=0$
$\iff k = -\frac{2}{3}$

$\to (1) : x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$\to (2) : y = -1 - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3}$

$\to (3) : z = \frac{2}{3}$

$d \cap \pi = \left\{ I\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right) \right\}$

5) - $d \subset \pi'$ donc $I \in \pi'$ et $C \in \pi'$

- comme $d \perp \pi$ et $d \subset \pi'$ on a bien : $\pi \perp \pi'$
- $B \in \pi$ (voir 2)) et $B \neq I$ donc B, C, I non alignés
- Par conséquent $\pi' = BCI$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

sont deux vecteurs directeurs non colinéaires de π'.

Ainsi : $M(x,y,z) \in \pi' \iff \det\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BI}\right) = 0$

$\iff \begin{vmatrix} x+1 & 2 & \frac{4}{3} \\ y & -1 & -\frac{5}{3} \\ z-1 & -1 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = 0$

$\iff \frac{1}{\cancel{3}}(x+1) - \frac{10}{\cancel{3}}(z-1) - \frac{4}{\cancel{3}}y + \frac{4}{\cancel{3}}(z-1) - \frac{5}{\cancel{3}}(x+1) + \frac{2}{\cancel{3}}y = 0 \quad |\cdot 3$

$\iff x+1-10z+10-4y+4z-4-5x-5+2y=0$

$\iff -4x-2y-6z+2=0 \quad |:(-2)$

$\iff 2x+y+3z-1=0 \equiv \pi'$