EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES

Session 2016

MATHÉMATIQUES I - Section D

QI $P(z) = 3iz^3 + (2-i)z^2 - (11-15i)z + 2(1-13i)$

$= 3iz^3 + (2-i)z^2 - (11-15i)z + 2 - 26i$

Soit $z_0 = bi$ $(b \in \mathbb{R})$ une racine imaginaire pure de P.

$P(z_0) = 0 \Leftrightarrow 3i(bi)^3 + (2-i)(bi)^2 - (11-15i)(bi) + 2 - 26i = 0$

$\Leftrightarrow 3b^3 - 2b^2 + b^2 i - 11bi - 15b + 2 - 26i = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3b^3 - 2b^2 - 15b + 2 = 0 \\ b^2 - 11b - 26 = 0 \end{cases}$ $\quad \Delta = 225 \quad b_1 = -2 \quad b_2 = 13$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} -24 - 8 + 30 + 2 \overset{!}{=} 0 \\ b = -2 \end{pmatrix} \right.$ ou $\begin{pmatrix} 6591 - 338 - 195 + 2 = 0 \\ b = 13 \end{pmatrix}$

impossible

P(z) est donc divisible par $z + 2i$.

S.d.H.

	$3i$	$2-i$	$-11+15i$	$2-26i$
$-2i$		6	$-2-16i$	$-2+26i$
	$3i$	$8-i$	$-13-i$	0

$P(z) = (z+2i)Q(z)$ avec $Q(z) = 3iz^2 + (8-i)z - 13 - i$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z + 2i = 0$ ou $Q(z) = 0$.

Résolvons l'équation $Q(z) = 0$

$\Delta = (8-i)^2 - 4 \cdot 3i \cdot (-13-i)$
$= 64 - 16i - 1 + 156i - 12$
$= 51 + 140i$

Soit $\delta = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ une racine carrée complexe de Δ.

On obtient le système suivant:

$\begin{cases} x^2 - y^2 = 51 & (1) \\ 2xy = 140 & (2) \\ x^2 + y^2 = 149 & (3) \end{cases}$ $\quad |\Delta| = \sqrt{51^2 + 140^2} = 149$

$(3) + (1)$: $2x^2 = 200 \Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow x = -10$ ou $x = 10$

$(3) - (1)$: $2y^2 = 98 \Leftrightarrow y^2 = 49 \Leftrightarrow y = -7$ ou $y = 7$

D'après (2), x et y ont le même signe car $xy > 0$.

Les racines carrées complexes de Δ sont $10+7i$ et $-10-7i$.

Les solutions de l'équation $Q(z)=0$ sont :

$$z_1 = \frac{-8+i+10+7i}{6i} = \frac{2+8i}{6i} = \frac{1+4i}{3i} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}i \qquad z_2 = \frac{-8+i-10-7i}{6i} = \frac{-18-6i}{6i} = \frac{-3-i}{i} = -1+3i$$

Finalement, on a : $S = \left\{-2i\,;\ \frac{4}{3} - \frac{1}{3}i\,;\ -1+3i\right\}$

<u>QII</u> 1. • $z_1 = \frac{13\sqrt{3}+13i}{2(i-2\sqrt{3})} - \frac{2(1-i)^3}{1+i}$

$$= \frac{13(\sqrt{3}+i)(-2\sqrt{3}-i)}{2(-2\sqrt{3}+i)(-2\sqrt{3}-i)} - \frac{2(1-i)^4}{(1+i)(1-i)}$$

$$= \frac{\cancel{13}(-6-\sqrt{3}i-2\sqrt{3}i+1)}{2\cdot \cancel{13}} - \frac{\cancel{2}(1-2i-1)^2}{\cancel{2}}$$

$$= \frac{-5-3\sqrt{3}i}{2} - (-2i)^2$$

$$= \frac{-5-3\sqrt{3}i+8}{2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i}}$$

• $z_2 = \frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2i}$

$$= \underline{\underline{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i}}$$

• $|z_1| = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{27}{4}} = 3$

$\begin{cases} \cos\varphi_1 = \frac{1}{2} \\ \sin\varphi_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{5\pi}{3}\ [2\pi]$

$\underline{\underline{z_1 = 3 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3}}}$

• $|z_2| = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$

$\begin{cases} \cos\varphi_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi_2 = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

$\underline{\underline{z_2 = \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}}}$

2. (a) $z_3 = \frac{(z_1)^3}{(z_2)^5}$

$= \frac{27 \operatorname{cis} 5\pi}{\operatorname{cis}\left(\frac{15\pi}{4}\right)}$

$= 27 \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

$= 27 \operatorname{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

(b) Les racines cubiques de z_3 sont données par

$r_k = 3 \cdot \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{2\pi}{3}\right)$ avec $k \in \{0;1;2\}$

càd $r_0 = 3\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $r_1 = 3\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $r_2 = 3\operatorname{cis}\left(\frac{13\pi}{12}\right)$.

QIII $\det(S) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m + 1 + m - m^2 + 1 + 1 = -m^2 + 2m + 3$

(S) est de Cramer $\Leftrightarrow \det(S) \neq 0 \Leftrightarrow -m^2 + 2m + 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$ et $m \neq 3$

$\Delta = 16$

• 1^{er} cas : $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1;3\}$

$x = \frac{\begin{vmatrix} m & -1 & m \\ -1 & m & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(S)} = \frac{m^2 + 2 - m - 2m^2 + m - 1}{\det(S)} = \frac{-m^2 + 1}{\det(S)} = \frac{+\cancel{(m+1)}(m-1)}{+\cancel{(m+1)}(m-3)} = \frac{m-1}{m-3}$

$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\det(S)} = \frac{-1 - m + 2m + m + 2 - m}{\det(S)} = \frac{\overset{1}{\cancel{m+1}}}{-(m-3)\cancel{(m+1)}} = \frac{-1}{m-3}$

$\Delta = 25$

$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\det(S)} = \frac{2m + 1 + m - m^2 + 1 + 2}{\det(S)} = \frac{-m^2 + 3m + 4}{\det(S)} = \frac{+\cancel{(m+1)}(m-4)}{+\cancel{(m+1)}(m-3)} = \frac{m-4}{m-3}$

donc $\forall m \in \mathbb{R} \setminus \{-1;3\}$ le système admet une solution unique.

$S = \left\{ \left(\frac{m-1}{m-3} ; \frac{-1}{m-3} ; \frac{m-4}{m-3} \right) \right\}$

Le système est formé des équations cartésiennes de 3 plans sécants en un point.

• 2^e cas : $m = -1$

$\begin{cases} x - y - z = -1 \\ x - y - z = -1 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \overset{(E_2) | (E_2) - (E_1)}{\underset{(E_3) | (E_3) + (E_1)}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} x - y - z = -1 \\ 0 = 0 \\ 2x = 1 \end{cases}$

En posant $y = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), on obtient : $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \alpha \\ z = \frac{3}{2} - \alpha \end{cases}$

donc si $m=-1$, le système est simplement indéterminé

$$S=\{(\tfrac{1}{2};\alpha;\tfrac{3}{2}-\alpha)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}$$

Le système est formé des équations cartésiennes de 3 plans sécants suivant la droite passant par $A(\frac{1}{2};0;\frac{3}{2})$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

• 3e cas : $m=3$

$$\begin{cases} x-y+3z=3 \\ x+3y-z=-1 \\ x+y+z=2 \end{cases} \underset{\Leftrightarrow}{\overset{(E_2)|(E_2)-(E_1)}{(E_3)|(E_3)-(E_1)}} \begin{cases} x-y+3z=3 \\ 4y-4z=-4 \\ 2y-2z=-1 \end{cases} \overset{(E_3)|2(E_3)-(E_2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-y+3z=3 \\ 4y-4z=-4 \\ 0=2 \end{cases}$$
imp.

donc si $m=3$, le système n'admet pas de solution

$$S=\emptyset$$

Le système est formé des équations cartésiennes de 3 plans n'ayant aucun point commun.

QIV 1. $\vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs non colinéaires du plan Π_1.

$$M(x;y;z)\in\Pi_1 \Leftrightarrow \exists\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}: \vec{AM}=\alpha\,\vec{AB}+\beta\cdot\vec{AC}$$

$$\Leftrightarrow \exists\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}: \begin{cases} x-1=-\alpha+\beta \\ y=2\alpha+\beta \\ z+1=+4\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}: \begin{cases} x=1-\alpha+\beta \\ y=2\alpha+\beta \\ z=-1+4\beta \end{cases}$$ syst. d'éq. paramétriques de Π_1

$$M(x;y;z)\in\Pi_1 \Leftrightarrow \vec{AM};\vec{AB};\vec{AC} \text{ coplanaires}$$

$$\Leftrightarrow \det(\vec{AM};\vec{AB},\vec{AC})=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y & 2 & 1 \\ z+1 & 0 & 4 \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow 8(x-1)-(z+1)-2(z+1)+4y=0$$

$$\Leftrightarrow 8x-8-z-1-2z-2+4y=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{8x+4y-3z-11=0}_{\text{éq. cart de }\Pi_1}$$

2 $\Pi_2 \parallel \Pi_1$ donc $\Pi_2 \equiv 8x+4y-3z+m=0 \quad (m \in \mathbb{R})$

$D(1;-1;-2) \in \Pi_2$

$\Leftrightarrow \quad 8-4+6+m=0$

$\Leftrightarrow \quad m=-10$

$\underline{\underline{\Pi_2 \equiv 8x+4y-3z-10=0}}$

3. Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur du plan Π_1, donc un vecteur directeur de la droite d.

On a :

$$d \equiv \begin{cases} x = 5+8k \\ y = -2+4k \\ z = -3k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-5}{8} = k & (1) \\ \dfrac{y+2}{4} = k & (2) \\ \dfrac{z}{-3} = k & (3) \end{cases}$$

(1) et (2) : $\dfrac{x-5}{8} = \dfrac{y+2}{4} \Leftrightarrow 4x-8y-36=0$

(1) et (3) : $\dfrac{x-5}{8} = \dfrac{z}{-3} \Leftrightarrow -3x-8z+15=0$

$$d \equiv \begin{cases} x-2y-9=0 \\ -3x-8z+15=0 \end{cases}$$