D Math I

Examen de fin d'études secondaires

Corrigé

Q I. $P(z) = 2iz^3 + 2(10+4i)z^2 + (56-51i)z - 27 - 96i$

Soit $z_0 = b \cdot i$

z_0 est sol. $\Leftrightarrow P(bi) = 0$

$$\Leftrightarrow 2i(bi)^3 + 2(10+4i)(bi)^2 + (56-51i)\cdot bi - 27 - 96i = 0$$

$$\Leftrightarrow 2b^3 - 20b^2 - 8b^2 i + 56bi + 51b - 27 - 96i = 0$$

$$\Leftrightarrow (2b^3 - 20b^2 + 51b - 27) + i(-8b^2 + 56b - 96) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b^3 - 20b^2 + 51b - 27 = 0 \\ -8b^2 + 56b - 96 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b^3 - 20b^2 + 51b - 27 = 0 \\ b^2 - 7b + 12 = 0 \end{cases} \qquad \Delta = 1 \quad b_1 = 4 \quad b_2 = 3$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} b = 3 \\ 54 - 180 + 153 - 27 \overset{!}{=} 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} b = 4 \\ 128 - 320 + 204 - 27 \overset{!}{=} 0 \end{pmatrix} \right.$$

impossible.

$\Leftrightarrow b = 3$

$P(z)$ est donc divisible par $z - 3i$

	$2i$	$20+8i$	$56-51i$	$-27-96i$
$3i$	/	-6	$-24+42i$	$27+96i$
	$2i$	$14+8i$	$32-9i$	0

$P(z) = (z-3i)(2iz^2 + (14+8i)z + 32 - 9i)$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z - 3i = 0$ ou $2iz^2 + (14+8i)z + 32 - 9i = 0 \quad (*)$

Résolvons $(*)$: $\Delta = (14+8i)^2 - 4\cdot 2i \cdot (32-9i)$

$$= 196 + 224i - 64 - 256i + 72i^2$$

$$= 60 - 32i$$

$\delta = x + y \cdot i$ est racine carrée complexe de Δ

$\Leftrightarrow \delta^2 = \Delta$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 60 - 32i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 60 \\ 2xy = -32 \end{cases}$$

$$\delta^2 = \Delta \Rightarrow |\delta^2| = |\Delta| \Rightarrow |\delta|^2 = |\Delta| \Rightarrow x^2+y^2 = 68$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 60 & (1) \\ 2xy = -32 & (2) \\ x^2+y^2 = 68 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 128 & (1)+(3) \\ 2y^2 = 8 & (3)-(1) \\ 2xy = -32 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \text{ ou } x = 8 \\ y = -2 \text{ ou } y = 2 \\ xy = -16 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \text{ et } y = 2 \\ \text{ou} \\ x = 8 \text{ et } y = -2 \end{cases}$$

Prendre p. ex $\delta = 8 - 2i$

sol. de $(*)$: $z_1 = \dfrac{-14-8i-8+2i}{4i} = \dfrac{-22-6i}{4i} = \dfrac{-3+11i}{2}$

$z_2 = \dfrac{-14-8i+8-2i}{4i} = \dfrac{-6-10i}{4i} = \dfrac{-5+3i}{2}$

Finalement : $S = \left\{ 3i \,;\, -\frac{3}{2} + \frac{11}{2} i \,;\, -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} i \right\}$

Q II

1) $z_1 = \dfrac{(-1+\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})}{2-2i} \cdot \dfrac{1+i}{1+i}$

$= \dfrac{(-1+\sqrt{3})(1+i) + (i+i\sqrt{3})(1+i)}{2(1-i^2)}$

$= \dfrac{-1+\cancel{\sqrt{3}} \cancel{-i} + \sqrt{3}i \cancel{+i} + i\sqrt{3} - 1 - \cancel{\sqrt{3}}}{2 \cdot 2}$

$= \dfrac{-2+2\sqrt{3}i}{4}$

$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$|z_1| = 1$

$$\begin{cases} \cos\varphi = -\frac{1}{2} \\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

$z_1 = \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$

$$z_2 = -\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i}$$

$$= -\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i + 6\sqrt{2}\,i + 2\sqrt{2}}{1-(2i)^2}$$

$$= -\frac{5\sqrt{2} + 5\sqrt{2}\,i}{1+4}$$

$$= -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$$

$$|z_2| = \sqrt{2+2} = 2$$

$$z_2 = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)$$

$$\begin{cases} \cos\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{4}$$

$$z_2 = 2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4}$$

2) $$z_1 \cdot z_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)\left(-\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i - \frac{\sqrt{6}}{2}\,i + \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3} \cdot 2\operatorname{cis}\frac{5\pi}{4}$$

$$= 2\operatorname{cis}\left(\frac{8\pi}{12} + \frac{15\pi}{12}\right)$$

$$= 2\operatorname{cis}\frac{23\pi}{12}$$

3) De a) et b) on a :

$$2\cos\frac{23\pi}{12} + i\,2\sin\frac{23\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{23\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ \sin\frac{23\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

Q III

$$\det(S) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & 1 & -1 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix} = m - m + 1 - 1 + m^2 - 1 = m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$$

(S) est de Cramer $\Leftrightarrow \det(S) \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$ et $m \neq 1$.

• 1^er^ cas : $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & m \end{vmatrix}}{\det(S)} = \frac{-1+m}{(m-1)(m+1)} = \frac{1}{m+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 1 & -1 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix}}{\det(S)} = \frac{m-1}{(m-1)(m+1)} = \frac{1}{m+1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\det(S)} = \frac{-1+1}{(m-1)(m+1)} = 0$$

donc : $\forall m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ le syst. admet une sol. unique

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+1}, 0 \right) \right\}$$

Le syst. est formé des ég. cart. de 3 plans sécants en un point.

<u>2^e cas</u> : <u>$m = -1$</u>

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + y - z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \underset{(E_2)/(E_1)+(E_2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 1 \quad \text{impossible} \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

donc : si $m = -1$ le syst. n'admet pas de sol.

$$S = \emptyset$$

Le syst. est formé des ég. cart. de 3 plans n'ayant aucun pt commun, les 2 premiers étant strict. parallèles

<u>3^e cas</u> : <u>$m = 1$</u>

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x = 1 & (E_2)/(E_1)+(E_2) \\ 0x + 0y + 0z = 0 & (E_3)/(E_1)-(E_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \alpha \\ z = \alpha - \frac{1}{2} \end{cases}$$

donc : si $m = 1$ le syst est simplement indéterminé

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \alpha, \alpha - \frac{1}{2} \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Le syst. est formé des ég. cart. de 3 plans dont le 1^{ier} et le 3^e sont confondus et coupent le 2^e suivant la droite passant par $A\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Q IV.

1) $\pi_1 = \pi_1(A', \vec{u}, \vec{v})$ avec $A'(5,0,1)$; $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$

$M(x,y,z) \in \pi_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{A'M}, \vec{u}, \vec{v}$ coplanaires

$$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{A'M}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-5 & -1 & -2 \\ y & 2 & 1 \\ z-1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(6-3) - y(-3+6) + (z-1)(-1+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - 15 - 3y + 3z - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - 3y + 3z - 18 = 0$$

$\pi_1 \equiv x - y + z - 6 = 0.$

2) $M(x,y,z) \in d \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \begin{cases} x+1 = k\cdot(1+1) \\ y-2 = k\cdot(5-2) \\ z-3 = k\cdot(2-3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = 2 + 3k \\ z = 3 - k \end{cases}$$

3) $I(x,y,z) \in \pi_1 \cap d$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z - 6 = 0 \\ x = -1 + 2k \\ y = 2 + 3k \\ z = 3 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\cancel{1} + 2k - \cancel{2} - 3k + \cancel{3} - k - 6 = 0 \Leftrightarrow -2k = 6 \Leftrightarrow k = -3 \\ x = -7 \\ y = -7 \\ z = 6 \end{cases}$$

$\pi_1 \cap d = \{ I(-7,-7,6) \}$

4) $\pi_2 \equiv -x + y + z = 6$ vect. normal : $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{n} \odot \vec{AB} = (-1)\cdot 2 + 1\cdot 3 + 1\cdot(-1) = 0$

donc : $\vec{n} \perp \vec{AB}$ c-à-d. $d \parallel \pi_2$

or : $-(-1) + 2 + 3 \overset{!}{=} 6$ d'où : $A \in \pi_2$

Par suite : $d \subset \pi_2$.

(ou bien : ... $1 - 2k + 2 + 3k + 3 - k \overset{!}{=} 6$

vrai $\forall k \in \mathbb{R}$

:)