Examen de fin d'études secondaires 2009
Section D – Mathématiques I

Exercice 1

1) $P(z) = z^3 - 2i z^2 + (3+4i)\cdot z + 8 - 6i$

Soit bi la racine imaginaire pure

$P(bi) = -b^3 i + 2b^2 i + 3bi - 6i - 4b + 8$

$P(bi) = 8 - 4b + (-b^3 + 2b^2 + 3b - 6)\cdot i = 0 + 0i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 8 - 4b = 0 & (1) \\ -b^3 + 2b^2 + 3b - 6 = 0 & (2) \end{cases} \longrightarrow b = 2$

(1) dans (2) : $-8 + 8 + 6 - 6 \overset{\checkmark}{=} 0$

$\Rightarrow$ $2i$ est la racine imaginaire pure de P

Horner :

	1	$-2i$	$3+4i$	$8-6i$
$2i$		$2i$	0	$-8+6i$
	1	0	$3+4i$	0

D'où : $P(z) = (z - 2i)\cdot \underbrace{\left(z^2 + (3+4i)\right)}_{Q(z)}$

$Q(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 = -(3+4i) = (a+bi)^2\, i^2$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \longrightarrow a = 2$ et $b = 1$ ou $a = -2$ et $b = -1$

D'où : $z_1 = (2+i)\cdot i = -1 + 2i$
$z_2 = (-2-i)\cdot i = 1 - 2i$

D'où : $S_{\mathbb{C}} = \{ 2i \,;\, -1+2i \,,\, 1-2i \}$

Exercice 1

2) a)

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}\cdot(2\sqrt{3}+6i)^2}{(\sqrt{3}+3i)^3} = \frac{2^2\cdot\sqrt{3}\;(\sqrt{3}+3i)^2}{(\sqrt{3}+3i)^3}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}-3i)}{(\sqrt{3}+3i)\cdot(\sqrt{3}-3i)} = \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{3}-3i)}{12} = \underline{\underline{1-\sqrt{3}i}}$$

$$z_2 = \frac{\left[\sqrt{6}-\sqrt{2}+(\sqrt{6}+\sqrt{2})i\right](\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)\cdot(\sqrt{3}-i)} = \frac{\sqrt{2}\left[3-\sqrt{3}i-\sqrt{3}+i+3i+\sqrt{3}i+\sqrt{3}+\right.}{4}$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{2}(4+4i)}{4} = \underline{\underline{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}}$$

Formes trigonométriques $|z_1| = \sqrt{1+3} = 2$

$$z_1 = 2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$|z_2| = \sqrt{2+2} = 2$ $\quad z_2 = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4}$

b)

$$z_3 = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{(1+\sqrt{3}i)(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}$$

$$\underline{\underline{z_3 = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})+i(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4}}} \qquad (F.A)$$

$$z_3 = \frac{2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2\,\text{cis}\left(\frac{-\pi}{3}\right)} = \text{cis}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \underline{\underline{\text{cis}\left(\frac{7\pi}{12}\right)}}$$

c) Par conséquent :

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \quad \text{et}$$

$$\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

D – I Ex 2009

Exercice 2

1) a) $M(x;y;z) \in \pi \Leftrightarrow \exists k, h \in \mathbb{R} : \vec{AM} = k \cdot \vec{AB} + h \cdot \vec{AC}$ (1)

$\Leftrightarrow \det(\vec{AM}, \vec{AB}, \vec{AC}) = 0$ (2)

Ad (1) : $\begin{cases} x+1 = k \cdot 3 + h \cdot 1 \\ y-2 = k \cdot (-3) + h \cdot (-4) \\ z-1 = k \cdot 2 + h \cdot (-2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 3k + h \\ y = 2 - 3k - 4h \\ z = 1 + 2k - 2h \end{cases}$ système d'éq. paramétriques de π

Ad(2) : $\det(\vec{AM}, \vec{AB}, \vec{AC}) = \begin{vmatrix} x+1 & 3 & 1 \\ y-2 & -3 & -4 \\ z-1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} x+1 & 3 \\ y-2 & -3 \\ z-1 & 2 \end{matrix}$

$= 6(x+1) + 2(y-2) - 12(z-1)$
$\quad + 8(x+1) + 6(y-2) + 3(z-1)$

$= 14(x+1) + 8(y-2) - 9(z-1)$

$= 14x + 14 + 8y - 16 - 9z + 9$

$\Rightarrow \pi \equiv 14x + 8y - 9z + 7 = 0$ éq. cartésienne de π.

b) $D \in \pi$ ssi ses coordonnées vérifient l'éq. cart. de π

Or : $14 \cdot (-5) + 8 \cdot 3 - 9 \cdot 1 + 7 = -70 + 24 - 9 + 7 \neq 0$

$\Rightarrow D \notin \pi$!

c) Il s'agit de résoudre le système formé par

$\begin{cases} 14x + 8y - 9z = -7 & \pi \\ x + 2y - z = 3 & \\ -x - 2y + 2z = 0 & \end{cases}$ $\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} d$

$\Leftrightarrow$ $(L_1) \leftrightarrow (L_2)$ $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 14x + 8y - 9z = -7 \\ -x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$

$\begin{matrix} (L_1) \\ (L_2) / (L_2) - 14(L_1) \\ (L_3) / (L_3) + (L_1) \end{matrix}$ $\begin{cases} x + 2y - z = 3 & (1) \\ -20y + 5z = -49 & (2) \\ z = 3 & (3) \end{cases}$

(3) dans (2) : $-20y = -64 \Leftrightarrow y = \frac{16}{5}$

dans (1) : $x = 3 - \frac{32}{5} + 3 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$

Point de Percée : $P\left(-\frac{2}{5} ; \frac{16}{5} ; 3\right)$

ercice 2

2) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 3 & a & -2 \end{array}\right]$

$L_2 / L_2 - L_1$, $L_3 / L_3 - L_1$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a-2 & -3 \end{array}\right]$

$L_2 \leftrightarrow L_3$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & a-2 & -3 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$L_2 / \frac{1}{2} L_2$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{a-2}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$L_3 / L_3 - (a-1) L_2$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{a-2}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(a-1)(a-2) & \frac{3}{2}(a-1) \end{array}\right]$ (1) (2) (3)

$\Rightarrow \quad L_3 \quad -\frac{1}{2}(a-1)(a-2) z = \frac{3}{2}(a-1)$

Discussion • Si $a = 1$ $\quad L_3 \quad 0 \cdot z = 0$ infinité de solutions

Posons $z = \gamma$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$

Dans (L_2) : $y - \frac{1}{2}\gamma = -\frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\gamma$

Dans (L_1) : $x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\gamma + 2\gamma = 1 \Rightarrow x = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}\gamma$

$d \equiv \begin{cases} x = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}\gamma \\ y = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\gamma \\ z = \quad 1\gamma \end{cases}$ éq. paramétriques d'une droite d passant par $A\left(\frac{5}{2} ; -\frac{3}{2} ; 0\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

• Si $a = 2$ $\quad 0 \cdot z = -3$ imp. $S = \emptyset$ les 3 plans ne se coupent pas.

• Si $a \neq 1$ et $a \neq 2$: $\quad z = \frac{-3}{a-2}$

dans (2) : $y = -\frac{3}{2} - \frac{a-2}{2} \cdot \frac{-3}{a-2} = 0$

dans (1) : $x = 1 - 2 \cdot \frac{-3}{a-2} = \frac{a+4}{a-2}$

$$S = \left\{ \left(\frac{a+4}{a-2} ; 0 , \frac{-3}{a-2} \right) , \ a \in \mathbb{R} - \{1 ; 2\} \right\}$$

Les trois plans se coupent en 1 seul point P qui dépend de a.