Corrigé proposition examen D (maths I)

Question 1

$$\underbrace{2z^3+(i-4)z^2+2(3i-2)z-2(i+2)}_{P(z)}\overset{(*)}{=}0$$

On sait qu'il existe $b\in\mathbb{R}$ tel que $P(ib)=0$

$\Leftrightarrow \quad -2b^3i+(i-4)(-b^2)+2(3i-2)(ib)-2(i+2)=0$

$\Leftrightarrow \quad (4b^2-6b-4)+i(-2b^3-b^2-4b-2)=0$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2b^2-3b-2=0 & (1) \\ 2b^3-b^2-4b-2=0 & (2) \end{cases}$$

(1) racines évidentes : $b=2$ ou $b=-1/2$
$b=2$ ne vérifie pas (2) ; $b=-1/2$ vérifie (2)

d'où la première racine de $(*)$: $z=-\frac{1}{2}i$

Donc : $P(z)=(z+\frac{1}{2}i)\,Q(z)$ et $Q(z)$ est obtenu par le schéma de Horner :

	2	$i-4$	$6i-4$	$-2i-4$
$-\frac{1}{2}i$		$-i$	$2i$	$2i+4$
	2	-4	$8i-4$	$R=0$

Donc : $Q(z)=2z^2-4z+(8i-4)$

Résolvons : $Q(z)=0 \qquad$ disc. $\Delta=16-4\cdot2\cdot(8i-4)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad =48-64i$

On cherche $x,y\in\mathbb{R}$ avec $(x+iy)^2=48-64i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\sqrt{48^2+64^2}\;(=80) & (a) \\ x^2-y^2=48 & (b) \\ xy<0 & (c) \end{cases}$$

$(a)+(b)$: $2x^2=128$
$x^2=64$
$x=8$ ou $x=-8$

$(a)-(b)$ $2y^2=32$
$y=4$ ou $y=-4$

avec (c) : les racines carrées de Δ sont : $\delta=8-4i$ ou $-\delta$.

Finalement les racines de $Q(z)=0$:

$$z=\frac{-(-4)\pm\delta}{4}=\frac{4\pm(8-4i)}{4}\;\begin{matrix}\nearrow 3-i\\ \searrow -1+i\end{matrix}$$

On a : $P(z)=2(z+\frac{1}{2}i)(z-3+i)(z+1-i)$

et $S=\{-\frac{1}{2}i,\;3-i,\;i-1\}$

Question 2

a) $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} = r_1 \operatorname{cis} \varphi_1$

avec : $r_1 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

$\begin{cases} \cos\varphi_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi_1 = \dfrac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ d'où : $\varphi_1 = -\dfrac{\pi}{6}\ (2\pi)$

$z_2 = 1 - i = r_2 \operatorname{cis}\varphi_2$

avec : $r_2 = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

$\begin{cases} \cos\varphi_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ d'où : $\varphi_2 = -\dfrac{\pi}{4}\ (2\pi)$

$z = \dfrac{z_1}{z_2} = r \operatorname{cis}\varphi$ avec : $r = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$

et $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12}$

d'où la forme trigonométrique de z : $z = \operatorname{cis}\dfrac{\pi}{12}$

et sa forme algébrique :

$$z = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)} = \frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

D'où en identifiant les parties réelle et imaginaire :

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

b) forme trigonométrique du réel -1 : $-1 = 1\cdot\operatorname{cis}\pi$

On cherche les complexes $z = \operatorname{cis}\varphi$ tels que

$z^3 = (r\cdot\operatorname{cis}\varphi)^3 = 1\operatorname{cis}\pi$ avec la formule de Moivre

$r^3\cdot\operatorname{cis}3\varphi = 1\operatorname{cis}\pi$

d'où : $r = 1$ et $\varphi = \dfrac{\pi+2k\pi}{3}$ avec $k \in \{0, 1, 2\}$

Si $k = 0$, on trouve : $\boxed{z_1 = 1\cdot\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

Si $k = 1$, on trouve : $\boxed{z_2 = 1\cdot\operatorname{cis}\pi = -1}$

Si $k = 2$, on trouve : $\boxed{z_3 = 1\cdot\operatorname{cis}\dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

Question 3

a) Un vecteur directeur de la droite d (donc de π, car $d \subset \pi$)

est $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}$. Un point de la droite d (donc de π) est $A(5,-1,-1)$.

D'où un deuxième vecteur directeur de π : $\vec{v} = \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires ! D'où :

$$P(x,y,z) \in \pi \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{MP}, \vec{u}, \vec{v}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & 0 & -2 \\ y & -2 & 1 \\ z+2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y+z+2=0}$$

b) Un vecteur normal à π' est $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}$.

Donc une équation cartésienne de π' peut s'écrire :

$$0x - 2y + 2z + k = 0 \qquad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

Les coordonnées de $M(3,0,-2)$ doivent vérifier cette équation.

$$0 - 0 + 2(-2) + k = 0 \Leftrightarrow k = 4$$

D'où une éq. de π' : $-2y + 2z + 4 = 0 \Leftrightarrow \boxed{y - z - 2 = 0}$

Question 4

Le système s'écrit matriciellement : $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & 1 \\ m & 1 & m \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\m\\1\end{bmatrix}$

$\det A = \ldots = -(m-1)^2(m+1)$

$\det A = 0 \Leftrightarrow m = -1$ ou $m = 1$

1) <u>Si $m=-1$</u>, le système devient : $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ -x + y + z = -1 \\ -x + y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -1 \end{cases}$

Le système est simplement indét.
Il est formé de 3 plans se coupant suivant une droite passant par $M(0,0,-1)$ et de vecteur directeur $\vec{d}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

2) <u>Si $m = 1$</u>, le système devient : $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow x+y+z=1$

Il est doublement indéterminé.
Il est formé de 3 plans confondus.

3) <u>Si $m \neq -1$ et $m \neq 1$</u>, il est de Cramer :

$\det A_x = \ldots = -(m-1)^2(m+1)$

$\det A_y = \ldots = -(m-1)^2(m+1)$

$\det A_z = \ldots = (m-1)^2(m+1)$

$S = \{(1,1,-1)\}$

Le système est formé de 3 plans se coupant au point $I(1,1,-1)$.