Examen de fin d'études ; section B ; septembre 2007 ; math I ; corrigé

Question 1 :

1) a) $w = i\,\dfrac{x+iy-2i}{x+iy+i} = i\,\dfrac{x+i(y-2)}{x+i(y+1)}$

$$= i\,\frac{[x+i(y-2)][x-i(y+1)]}{[x+i(y+1)][x-i(y+1)]}$$

$$= i\,\frac{x^2-ix(y+1)+i(y-2)x+(y-2)(y+1)}{x^2+(y+1)^2}$$

$$= i\,\frac{[x^2+(y-2)(y+1)]+i[(y-2)x-x(y+1)]}{x^2+(y+1)^2}$$

$$= \frac{-[(y-2)x-x(y+1)]+i[x^2+(y-2)(y+1)]}{x^2+(y+1)^2}$$

$$= \frac{-(\cancel{xy}-2x-\cancel{xy}-x)}{x^2+(y+1)^2}+i\,\frac{x^2+y^2+y-2y-2}{x^2+(y+1)^2}$$

$$= \boxed{\frac{3x}{x^2+(y+1)^2}+i\,\frac{x^2+y^2-y-2}{x^2+(y+1)^2}}$$

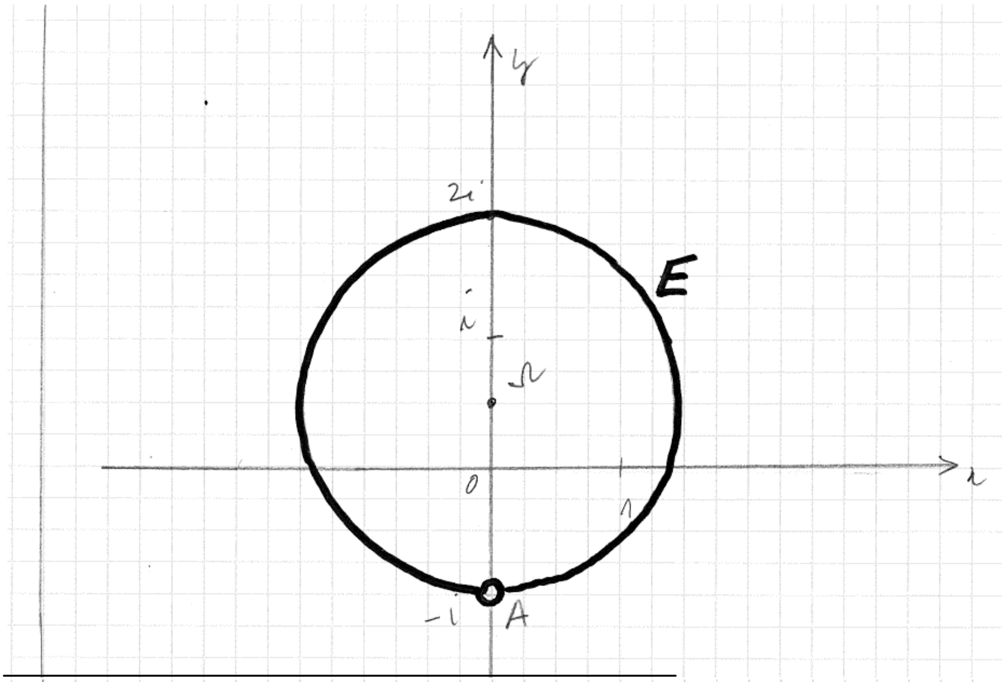
b) $w \in \mathbb{R} \iff \Im(w)=0$

$\iff x^2+y^2-y-2=0$

$\iff x^2+\left(y^2-2\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}\right)=2+\frac{1}{4}$

$\iff \boxed{x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}}$

E est le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega\left(0,\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $R=\frac{3}{2}$ privé du point $A(0,-1)$



2) a) Soit $\delta = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\cdot\ \delta^2 = -\sqrt{3} - i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -\sqrt{3} & (1) \\ 2xy = -1 & (2) \\ x^2 + y^2 = 2 & (3) \end{cases}$

$(3) + (1) \Rightarrow 2x^2 = 2 - \sqrt{3} \iff x^2 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2} \iff x = \pm\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}$

$(3) - (1) \Rightarrow 2y^2 = 2 + \sqrt{3} \iff y^2 = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2} \iff y = \pm\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}$

$(2) \Rightarrow x$ et y sont de signes contraires

D'où $\boxed{\begin{aligned} \delta_1 &= \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}} - i\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}} \\ \delta_2 &= -\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}} \end{aligned}}$

b) $z = -\sqrt{3} - i$

$|z| = \sqrt{3+1} = 2$

$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\alpha &= -\dfrac{1}{2} \end{aligned}\right\} \iff \alpha = -\dfrac{5\pi}{6}\ (2\pi)$

Ainsi $z = 2\operatorname{cis}\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$

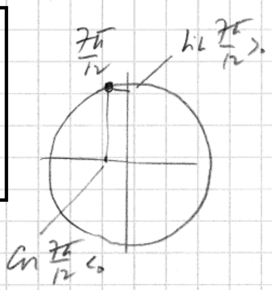
$u = \rho \operatorname{cis}\varphi$, $\rho > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$

$u^2 = \rho^2 \operatorname{cis} 2\varphi$

$u^2 = z \iff \begin{cases} \rho^2 = 2 \\ 2\varphi = -\frac{5\pi}{6}\ (2\pi) \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \varphi = -\frac{5\pi}{12}\ (\pi) \end{cases}$

2 racines carrées :

$$\boxed{\begin{aligned} u_1 &= \sqrt{2}\ \text{cis}\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \\ u_2 &= \sqrt{2}\ \text{cis}\left(-\frac{5\pi}{12}+\pi\right) = \sqrt{2}\ \text{cis}\ \frac{7\pi}{12} \end{aligned}}$$



c) $\text{Re}(u_2) = \sqrt{2} \cos \frac{7\pi}{12} < 0$

$\text{Im}(u_2) = \sqrt{2} \sin \frac{7\pi}{12} > 0$

On en déduit que $\underline{u_2 = \delta_2}$

Par suite $\sqrt{2} \cos \frac{7\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$ c-à-d $\boxed{\cos \frac{7\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$

$\sqrt{2} \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$ c-à-d $\boxed{\sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$

3) Soit $z = \frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{3}} = \frac{z_1}{z_2}$

$z_1 = \sqrt{2}(-1+i) = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\ \text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2\ \text{cis}\ \frac{3\pi}{4}$

$z_2 = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\ \text{cis}\ \frac{\pi}{3}$

D'où $z = \frac{2\ \text{cis}\ \frac{3\pi}{4}}{2\ \text{cis}\ \frac{\pi}{3}} = \text{cis}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = \text{cis}\ \frac{5\pi}{12}$

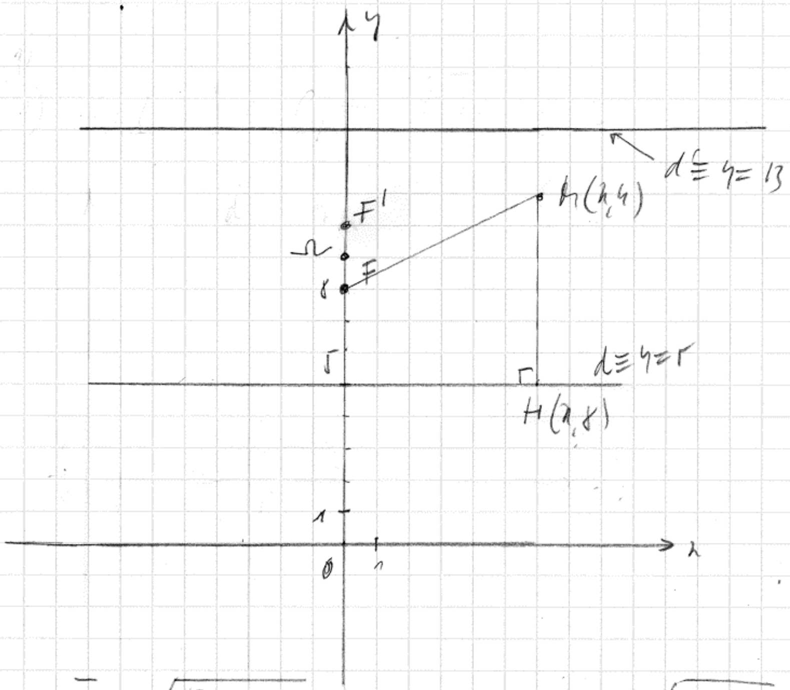
Ensuite $z^{2007} = \left(\text{cis}\ \frac{5\pi}{12}\right)^{2007} = \text{cis}\ 2007\cdot\frac{5\pi}{12}$

$\frac{2007\cdot 5\pi}{12} = 836\pi + \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + 418\cdot 2\pi = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

Ainsi $z^{2007} = \text{cis}\ \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}$

Question 2 :

1) $M(x,y) \in C_1 \Leftrightarrow FM = \frac{1}{2}\,\mathrm{dist}(M,d) \quad (*)$



$FM = \sqrt{x^2+(y-8)^2}$, $\mathrm{dist}(M,d) = \sqrt{(y-5)^2}$

$$(*) \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{x^2+(y-8)^2}}_{\geq 0} = \underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{(y-5)^2}}_{\geq 0}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+(y-8)^2 = \frac{1}{4}(y-5)^2 \quad \Big|\cdot 4$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+4y^2-64y+256-y^2+10y-25=0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+3y^2-54y+231=0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+3(y^2-2\cdot 9y+9^2) = -231+243$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+3(y-9)^2 = 12 \quad \Big|:12$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{x^2}{3}+\frac{(y-9)^2}{4}=1}$$

C_1 est une ellipse image de l'ellipse $E \equiv \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ par la translation de vecteur $\vec{u}(0,9)$

Le centre de C_1 est donc $\Omega(0,9)$ et son axe focal est Oy

Il s'ensuit encore que le 2e foyer est $\underline{F'(0,9)}$

la 2e directrice est $\underline{d' \equiv y = 13}$

---

2) a) $\mathbb{P} \equiv x^2 = -4y$ est l'équation d'une parabole de sommet $S = O$, d'axe focal Oy et de foyer $F(0, -\frac{4}{4})$ c-à-d $\underline{F(0,-1)}$

L'affirmation est donc <u>fausse</u> !

b) C est une hyperbole de centre O d'axe focal Oy

$a = 5,\ b = 4,\quad c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 16 = 41$

$c = \sqrt{41}$

$\underline{\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{41}}{4}} \neq \frac{5}{4}$

L'affirmation est <u>fausse</u>

c) $\Gamma \equiv 25x^2 + 16y^2 + 50x - 64y - 311 = 0$

$\iff 25(x^2 + 2x) + 16(y^2 - 4y) = 311$

$\iff 25(x^2 + 2x + 1) + 16(y^2 - 4y + 4) = 311 + 25 + 64$

$\iff 25(x+1)^2 + 16(y-2)^2 = 400 \quad |:400$

$\iff \frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$

Γ est donc une ellipse

$\Gamma = t_{\vec{u}}(\mathcal{E})$ avec $\mathcal{E} \equiv \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ et $\vec{u}(-1,2)$

$\mathcal{E}$	C_2
centre O	centre $\Omega(-1,2)$
axe focal $Oy \equiv x = 0$	axe focal $\delta \equiv x = -1$
$a = 4,\ b = 5$ $c^2 = b^2 - a^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow c = 3$	
Foyers $F(0,3),\ F'(0,-3)$	$\boxed{\text{Foyers : } \underbrace{F_1(-1,5),\ F'_1(-1,-1)}_{\text{l'affirmation est vraie !}}}$

Question 3 :

1) On allume 1 lampe parmi 7 : C_7^1

2 lampes — 7 : C_7^2

3 —— : C_7^3

⋮

7 —— 7 C_7^7

(N.B. l'ordre n'importe PAS !)

Nombre d'éclairages possible :

$\boxed{C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 + \dots + C_7^7}$ $(= 2^7 - 1)$

$= 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1$

$= \underline{127}$

2) Expérience aléatoire :

tirer au hasard 1 carte de chaque paquet

Evt élém = une main de 4 cartes comprenant une carte de chaque couleur

Les évt élém sont équiprobables

$\# \Omega = ?$

$\xrightarrow{8}$ tirer 1 coeur $\xrightarrow{8}$ tirer 1 carreau $\xrightarrow{8}$ tirer 1 trèfle $\xrightarrow{8}$ tirer 1 pique

Donc $\# \Omega = 8^4 = 4096$

a) X prend les valeurs 100, 30, 2 et −2

$P(X = 100) = P(A)$ où A est l'évt "tirer les 4 as"

$\xrightarrow{1}$ tirer l'as de coeur $\xrightarrow{1}$ " l'as de carreau $\xrightarrow{1}$ " l'as de trèfle $\xrightarrow{1}$ " l'as de pique

$\#A = 1$, d'où $\boxed{P(X=100) = \frac{1}{4096} \simeq 0{,}0002 = 0{,}02\%}$

$P(X=30) = P(B)$ où B est l'év^t "tirer exactement 3 as"

$$\xrightarrow{C_4^3} \text{Choisir les 3 couleurs } c_1, c_2, c_3 \text{ des 3 as} \xrightarrow{7} \text{Choisir 1 carte de couleur } c \neq c_1, c_2, c_3 \text{ et } \neq \text{as}$$

$\#B = C_4^3 \cdot 7 = 4 \cdot 7 = 28$

$$\boxed{P(X=30) = \frac{28}{4096} = \frac{7}{1024} \simeq 0{,}0068 = 0{,}68\%}$$

$P(X=2) = P(C)$ où C est l'év^t "tirer exactement 2 as"

$$\xrightarrow{C_4^2} \text{Choisir les 2 couleurs des 2 as} \xrightarrow{7} \text{Choisir la 3}^e \text{ carte} \neq \text{as} \xrightarrow{7} \text{Choisir la 4}^e \text{ carte} \neq \text{as}$$

$\#C = C_4^2 \cdot 7 \cdot 7 = 294$

$$\boxed{P(X=2) = \frac{294}{4096} = \frac{147}{2048} \simeq 0{,}0718 = 7{,}18\%}$$

$$\boxed{P(X=-2)} = 1 - \left(P(X=100) + P(X=30) + P(X=2)\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{4096} - \frac{28}{4096} - \frac{294}{4096}$$

$$= \boxed{\frac{3773}{4096} \simeq 0{,}9211 = 92{,}11\%}$$

b) Calculons $E(X)$!

$$\underline{E(X)} = 100 \cdot P(X=100) + 30 \cdot P(X=30) + 2P(X=2) - 2P(X=-2)$$

$$= 100 \cdot \frac{1}{4096} + 30 \cdot \frac{28}{4096} + 2\frac{294}{4096} - 2\frac{3773}{4096}$$

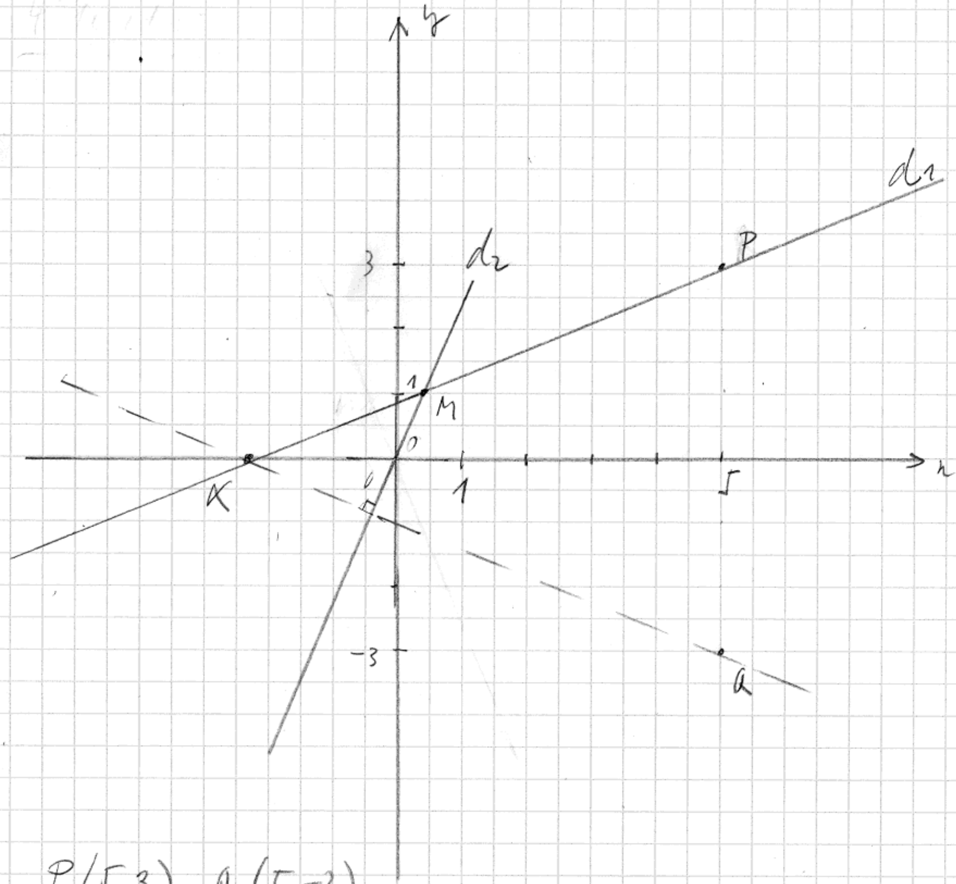
$$= \frac{100 + 840 + 588 - 7546}{4096} = -\frac{6018}{4096} = -\frac{3009}{2048}$$

$$\underline{\simeq -1,47}$$

Le joueur perd en moyenne 1,47 euros par jeu.

Le jeu est donc <u>défavorable</u> au joueur.

Question 4 :



$P(5,3)$, $Q(5,-3)$

$K(t,0)$, $t \in \mathbb{R}$ (t = paramètre !)

Équations de d_1 et de d_2 ?

$d_1 = KP \equiv 3x + (t-5)y + \underbrace{k}_{?} = 0$ $\left(\overrightarrow{KP}(5-t,\ 3) = \text{v. directeur de } d_1\right)$

$K(t,0) \in d_1 \iff 3t + k = 0 \iff k = -3t$

Ainsi $d_1 \equiv 3x + (t-5)y - 3t = 0$

$d_2 \perp KQ \implies \overrightarrow{KQ}(5-t, -3)$ est un v. normal de d_2

Ainsi $d_2 \equiv (5-t)x - 3y = 0$

(d_1 et d_2 sont les génératrices du lieu)

$M(x,y) \in \mathbb{L}$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \text{ tq } (I) \begin{cases} 3x + (t-5)y - 3t = 0 & (1) \\ (5-t)x - 3y = 0 & (2) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ le système (I) possède au moins une solution $t \in \mathbb{R}$

$(2) \Leftrightarrow 5x - tx - 3y = 0 \Leftrightarrow tx = 5x - 3y$

1) Si $x \neq 0$ alors $(2) \Leftrightarrow t = \dfrac{5x-3y}{x}$

Est-ce que ce t est également solution de (1) ?

Oui $\Leftrightarrow 3x + \left(\dfrac{5x-3y}{x} - 5\right)y - 3\,\dfrac{5x-3y}{x} = 0 \quad | \cdot x \neq 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 + (\cancel{5x} - 3y - \cancel{5x})y - 3(5x-3y) = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{3}x^2 - \cancel{3}y^2 - \cancel{3}(5x-3y) = 0$

$\Leftrightarrow \underline{x^2 - y^2 - 5x + 3y = 0}$

2) Si $x = 0$ alors $(2) \Leftrightarrow t \cdot 0 = -3y$

2.1) Si $y = 0$ alors tout $t \in \mathbb{R}$ est solution de (2). Est-ce que parmi ces t il y en a au moins un qui est également sol. de (1) ?

$(1) \Leftrightarrow 3 \cdot 0 + (t-5) \cdot 0 - 3t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ oui !

Donc $\underline{O(0,0) \in \mathbb{L}}$!

2.2) Si $y \neq 0$ alors (2) n'a pas de solution ! donc (I) ______

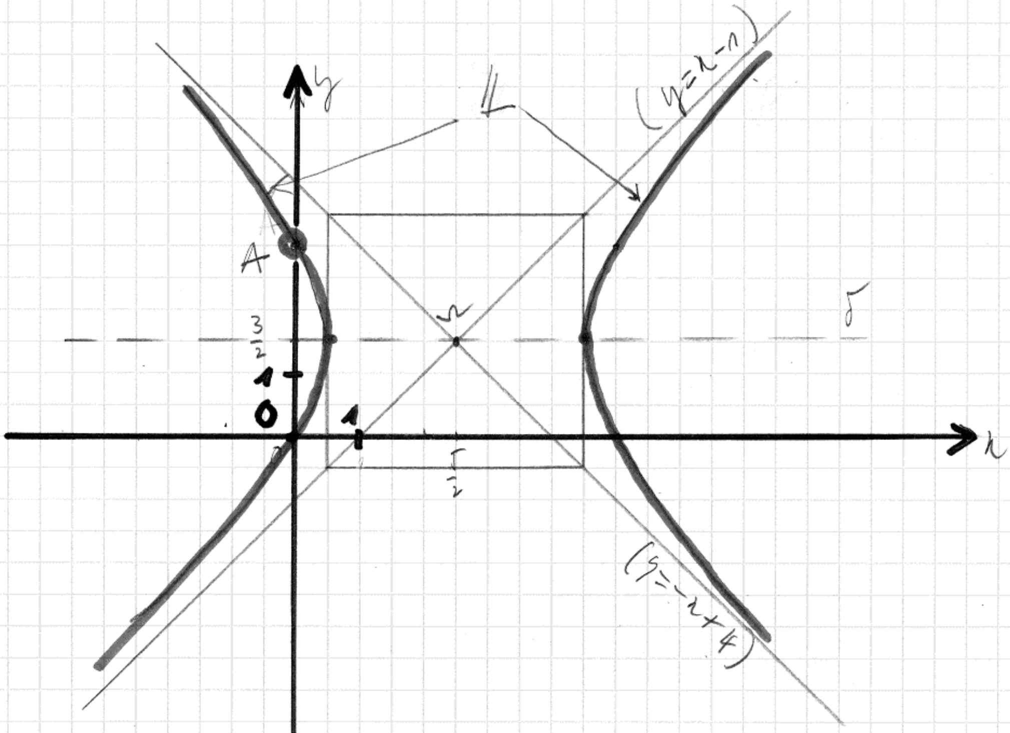
En résumé : $\boxed{\mathbb{L} = \mathbb{L}' \cup \{O\} \quad \text{avec } \mathbb{L}' \equiv \underbrace{x^2 - y^2 - 5x + 3y = 0}_{(3)} \text{ et } x \neq 0}$

$$(3) \Leftrightarrow \left(x^2 - 2\,\tfrac{5}{2}x + \tfrac{25}{4}\right) - \left(y^2 - 2\,\tfrac{3}{2}y + \tfrac{9}{4}\right) = \tfrac{25}{4} - \tfrac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \tfrac{5}{2}\right)^2 - \left(y - \tfrac{3}{2}\right)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2}{4} - \frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{4} = 1$$

(3) est l'équation d'une hyperbole $\mathcal{H}$ de centre $\Omega\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ et d'axe focal $\parallel Ox$ c-à-d d'axe focal $\delta \equiv y = \frac{3}{2}$; $a = b = 2$.



N.B : si $x = 0$ alors $(3) \Leftrightarrow -y^2 + 3y = 0 \Leftrightarrow -y(y-3) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $y = 3$

$O \in \mathcal{H}$ et $\underline{A(0,3)} \in \mathcal{H}$

$\mathbb{L}' = \mathcal{H} - \{O, A\}$, d'où $\boxed{\mathbb{L} = \mathbb{L}' \cup \{O\} = \mathcal{H} - \{A\}}$