LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES
2018

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques I	**B**	*Durée de l'épreuve :* *3 heures* *Date de l'épreuve :* *11 juin 2018*

<u>Question 1</u> (11+5=16 points)

1) On considère le polynôme P défini par $P(z) = z^3 + \alpha\, z^2 + (28 - 44\, i)z + 8\,\beta$ où α et β sont des nombres complexes.
   a) Déterminer α et β sachant que $-4i$ est une racine de P et que le reste de la division euclidienne de P par $z - 1 + i$ est $6 + 58i$.
   b) Résoudre l'équation $P(z) = 0$ en remplaçant α et β par les valeurs trouvées ci-dessus.
   c) On pose : $z_A = -4i$, z_B est l'autre racine de P dont la partie imaginaire est négative et z_C est la racine de P restante. A, B et C sont les points du plan de Gauss d'affixes z_A, z_B et z_C. Déterminer la nature du triangle ABC.
2) Soit $\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{i}-\mathrm{z}}$ avec $z = x + iy$ (x, y réels) et $\mathrm{z} \neq \mathrm{i}$.

   Déterminer et représenter (unité graphique : 4 cm) dans le plan de Gauss les ensembles $\mathrm{E} = \{\mathrm{M(z)} \text{ tel que Z réel}\}$ et $\mathrm{F} = \{\mathrm{M(z)} \text{ tel que Z imaginaire pur}\}$.

<u>Question 2</u> (7+3+5=15 points)

Le plan est muni d'un R.O.N. $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) On considère la courbe $\mathrm{C} \equiv 4\mathrm{x}^2 - 10\mathrm{x} - 9\mathrm{y}^2 - 27\mathrm{y} - 50 = 0$
   a) Déterminer la nature, le centre Ω et l'excentricité de C .
   b) Préciser les coordonnées des foyers et des sommets, une équation de l'axe focal, des équations des directrices et des équations des asymptotes éventuelles dans le R.O.N. $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   c) Dans le R.O.N. $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$: Vérifier que le point $E(5\,; -3)$ appartient à C. Établir une équation de la tangente t à C en E.
2) a) Sachant que le grand axe d'une ellipse mesure 4 et que son excentricité vaut $\frac{1}{3}$, calculer la distance du centre de l'ellipse à une de ses directrices.
   b) Trouver une équation cartésienne de la parabole de sommet $O(0\,; 0)$ passant par le point $A(-12; 6)$ et admettant l'axe des abscisses comme axe focal.
3) On considère une parabole $\mathrm{P} \equiv \mathrm{y}^2 = 4\mathrm{x} - 8$.

   Déterminer les équations réduites des tangentes à P issues de A(0 ;2).

Question 3 (5+6+3=14 points)

1) On tire 5 fois de suite une carte au hasard d'un jeu de 52 cartes. Après chaque tirage on remet la carte dans le jeu.
   a) Quelle est la probabilité de tirer exactement 2 cœurs ? au plus 4 cœurs ? au moins 1 cœur ?
   b) Combien de fois doit-on tirer de suite une carte pour que la probabilité d'avoir au moins 1 cœur soit supérieure ou égale à 0,95 ?
2) Un jeu consiste à lancer 3 fois de suite une flèche sur une cible numérotée 1, 2, 3, 4 et 5. On suppose que la cible est atteinte et que la probabilité d'atteindre les différents numéros est identique. La participation à ce jeu coûte 5€. Si le joueur atteint 3 fois de suite le numéro 1 il obtient 50€, s'il atteint le numéro 1 exactement 2 fois il obtient 20€, s'il atteint le numéro 1 exactement une fois il récupère sa mise. Dans tous les autres cas la mise est perdue.
   a) Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui donne le gain du joueur.
   b) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de cette variable aléatoire. Le jeu est-il favorable au joueur ?
   c) Comment fixer le coût d'une participation à ce jeu pour que le jeu soit équitable ?
3) n et k sont des entiers naturels avec $n \geq k \geq 1$.
   Calculer : $kC_n^k + nC_{n-1}^k$. En déduire que : $nC_{n-1}^k = (n-k)C_n^k$.

Question 4 (15 points)

Dans un repère orthonormé du plan π , de centre O et d'unité graphique 2 cm, on considère les points A(2 ;0) et B(0 ;1). Q est un point mobile sur la droite (AO) . Par Q on mène une droite d de coefficient directeur 4. Cette droite coupe (BO) en un point R. Les droites (RA) et (QB) se coupent en un point I. Déterminer une équation cartésienne du lieu $\mathbb{L}$ du point I et représenter $\mathbb{L}$.